フラクタル的性質を持つ実関数についての 2，3 の注意

河 邑 紀 子

1. de Rham は，次の関数方程式：

$$M_\alpha(x)=\begin{cases}\alpha M_\alpha(2x), & 0\leq x\leq 1/2,\\ (1-\alpha)M_\alpha(2x-1)+\alpha, & 1/2<x\leq 1,\end{cases}$$

(但し，$\alpha\in(0,1)$，$\alpha\neq 1/2$) の一意的な連続解として，Lebesgue の特異関数 $M_\alpha(x)$（すなわち，狭義単調増加関数で，ほとんどいたるところ $M_\alpha'(x)=0$）が得られることを示した．一方，特異関数の中には，3 進の Cantor 関数と呼ばれる広義単調増加関数 $C(x)$ が存在する．両者は共に特異関数ではあるけれども，今までは別々に取り扱われてきた．

そこで，2 つのパラメーター α,β を持つ関数族 $F_{\alpha,\beta}(x)$ を導入して，両者を関係づける．$F_{\alpha,\beta}(x)$ は，次の関数方程式：

フラクタル的性質を持つ実関数についての2，3の注意

河 邑 紀 子

1. de Rham は，次の関数方程式：

$$M_\alpha(x)=\begin{cases}\alpha M_\alpha(2x), & 0\leq x\leq 1/2,\\ (1-\alpha)M_\alpha(2x-1)+\alpha, & 1/2<x\leq 1,\end{cases}$$

(但し，$\alpha\in(0,1)$，$\alpha\neq 1/2$)の一意的な連続解として，Lebesgue の特異関数 $M_\alpha(x)$（すなわち，狭義単調増加関数で，ほとんどいたるところ $M'_\alpha(x)=0$）が得られることを示した．一方，特異関数の中には，3 進の Cantor 関数と呼ばれる広義単調増加関数 $C(x)$ が存在する．両者は共に特異関数ではあるけれども，今までは別々に取り扱われてきた．

そこで，2 つのパラメーター α,β を持つ関数族 $F_{\alpha,\beta}(x)$ を導入して，両者を関係づける．$F_{\alpha,\beta}(x)$ は，次の関数方程式：

$$F_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}(1/2)F_{\alpha,\beta}(x/\alpha), & 0\leq x\leq\alpha,\\ 1/2, & \alpha<x\leq\alpha+\beta,\\ (1/2)F_{\alpha,\beta}((x-\alpha-\beta)/(1-\alpha-\beta)), & \alpha+\beta<x\leq 1,\end{cases}$$

(但し，$\alpha\in(0,1)$，$\alpha\neq 1/2$，$0\leq\beta<1-\alpha$) の一意的な連続解とする．この時，特殊な場合として，

$$F_{\alpha,0}^{-1}(x)=M_\alpha(x),\quad 0\leq x\leq 1, \qquad (1)$$

および

$$F_{1/3,1/3}(x)=C(x),\quad 0\leq x\leq 1 \qquad (2)$$

を得る．なぜなら，$F_{\alpha,0}(x)$ は狭義単調増加関数であり，その逆関数 $F_{\alpha,0}^{-1}(x)$ は次の de Rham の関数方程式：

$$\begin{cases}F_{\alpha,0}^{-1}(x)=\alpha F_{\alpha,0}^{-1}(2x), & 0\leq x\leq 1/2,\\ F_{\alpha,0}^{-1}(x)=(1-\alpha)F_{\alpha,0}^{-1}(2x-1)+\alpha, & 1/2\leq x\leq 1\end{cases}$$

(但し，$\alpha\in(0,1)$，$\alpha\neq 1/2$) の一意的な連続解である事より，(1) が得られる．また，(2) は，関数方程式より明らかである．

そこで，この両者をつなぐ関数 $F_{\alpha,\beta}(x)$ については，次の事が成立する．

定理 1. $F_{\alpha,\beta}(x)$ は，特異関数である．

証明．$\beta>0$ の場合，$F_{\alpha,\beta}(x)$ における可算無限個の flat な区間の和集合を G とおくと，G の測度 $\mu(G)$ は，

$$\mu(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta(1-\beta)^{n-1}=1$$

であるから，$E=[0,1]-G$ とおくと，$\mu(E)=0$ である．また，関数方程式から，関数 $F_{\alpha,\beta}(x)$ のグラフの自己相似性が従い，$F_{\alpha,\beta}(x)$ が零集合 E の上だけで増加する，単調な特異関数である．また，$\beta=0$ の場合も明らかである．□

2. 次に，いたるところ微分不可能な連続関係である Weierstrass 関数が，一般的に，カオス力学系である Tchebycheff 多項式と関係づけられていることを報告する．いたるところ微分不可能な連続関数の最初の例として，Weierstrass は，

$$W_{a,b}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),$$

を与えた．但し，$0<a<1$ で b は，$ab>1+3\pi/2$ を満たす奇数である．この条件は，後に Hardy によって，b は $ab\geq 1$ を満たす実数で良いことが示された．一方，特に $b=2$ の時に，山口，畑は [2] の中で，次の事を示している．

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n\phi^n(x)=\frac{1}{2(1-a)}-\frac{1}{2}W_{a,2}(2/\pi\ \mathrm{Arc}\sin\sqrt{x}),\quad 0\leq x\leq 1,$$

(但し，$1/2\leq a<1$ で，$\phi^n(x)$ は，ϕ の n 回合成を示す)．上式は，典型的な単位区間上のカオス力学系 $\phi(x)=4x(1-x)$ の母関数と，Weierstrass 関数 $W_{a,2}(x)$ との関係を表している点で，興味深い．

このアイデアは，自然に b が 2 以上の自然数の場合に，一般化される事を以下に示そう．$T_b(x)=\cos(b\ \mathrm{Arc}\cos x)$ を b 次の Tchebycheff 多項式とする．(特に，$T_2(x)=2x^2-1$ で，これは $\phi(x)=4x(1-x)$ と位相共役である事に注意．) この時，上式の一般化として，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n T_b^n(x) = W_{a,b}\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{Arc}\cos x\right), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

(但し，$0<a<1$ で，b は $ab \geq 1$ を満たす自然数）を得る．$T_b^n(x)$ は T_b の n 回合成であり，そのラップ数は b^n である事から，$T_b(x)$ の位相エントロピーは $\log b$ である．この意味において，$T_b(x)$ は，$[-1,1]$ 上の力学系としてカオス的である．

謝辞． この小文を書くにあたり，山口昌哉，畑政義，加古富志雄先生，また，レフェリーの先生には貴重な助言を頂いた．ここに感謝の意を表したい．

文　献

[1] Hata, M., and Yamaguti, M., Takagi Function and Its Generalization, Japan J. Appl. Math., **1**, 183-199 (1984).

[2] Yamaguti, M., and Hata, M., Weierstrass's Function and Chaos, Hokkaido. Math. J., **12**, 333-342 (1983).

[3] 山口，畑，木上，フラクタルの数理，岩波書店 (1993).

(1997年3月17日提出)

(かわむら　きこ：奈良女子大学理学部)