

フラクタル的性質を持つ実関数についての 2, 3 の注意

河 邑 紀 子

1. de Rham は, 次の関数方程式:

$$M_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha M_\alpha(2x), & 0 \leq x \leq 1/2, \\ (1-\alpha) M_\alpha(2x-1) + \alpha, & 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

(但し, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq 1/2$) の一意的な連続解として, Lebesgue の特異関数 $M_\alpha(x)$ (すなわち, 狭義単調増加関数で, ほとんどいたるところ $M'_\alpha(x) = 0$) が得られることを示した. 一方, 特異関数の中には, 3進の Cantor 関数と呼ばれる広義単調増加関数 $C(x)$ が存在する. 両者は共に特異関数ではあるけれども, 今までは別々に取り扱われてきた.

そこで, 2つのパラメーター α, β を持つ関数族 $F_{\alpha, \beta}(x)$ を導入して, 両者を関係づける. $F_{\alpha, \beta}(x)$ は, 次の関数方程式:

フラクタル的性質を持つ実関数についての 2, 3 の注意

河 邑 紀 子

1. de Rham は, 次の関数方程式:

$$M_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha M_\alpha(2x), & 0 \leq x \leq 1/2, \\ (1-\alpha) M_\alpha(2x-1) + \alpha, & 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

(但し, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq 1/2$) の一意的な連続解として, Lebesgue の特異関数 $M_\alpha(x)$ (すなわち, 狭義単調増加関数で, ほとんどいたるところ $M'_\alpha(x) = 0$) が得られることを示した. 一方, 特異関数の中には, 3 進の Cantor 関数と呼ばれる広義単調増加関数 $C(x)$ が存在する. 両者は共に特異関数ではあるけれども, 今までは別々に取り扱われてきた.

そこで, 2 つのパラメーター α, β を持つ関数族 $F_{\alpha, \beta}(x)$ を導入して, 両者を関係づける. $F_{\alpha, \beta}(x)$ は, 次の関数方程式:

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (1/2)F_{\alpha,\beta}(x/\alpha), & 0 \leq x \leq \alpha, \\ 1/2, & \alpha < x \leq \alpha + \beta, \\ (1/2)F_{\alpha,\beta}((x - \alpha - \beta)/(1 - \alpha - \beta)), & \alpha + \beta < x \leq 1, \end{cases}$$

(但し, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq 1/2$, $0 \leq \beta < 1 - \alpha$) の一意的な連続解とする. この時, 特殊な場合として,

$$F_{\alpha,\beta}^{-1}(x) = M_\alpha(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

および

$$F_{1/3,1/3}(x) = C(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

を得る. なぜなら, $F_{\alpha,\beta}(x)$ は狭義単調増加関数であり, その逆関数 $F_{\alpha,\beta}^{-1}(x)$ は次の de Rham の関数方程式:

$$\begin{cases} F_{\alpha,\beta}^{-1}(x) = \alpha F_{\alpha,\beta}^{-1}(2x), & 0 \leq x \leq 1/2, \\ F_{\alpha,\beta}^{-1}(x) = (1 - \alpha) F_{\alpha,\beta}^{-1}(2x - 1) + \alpha, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(但し, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq 1/2$) の一意的な連続解である事より, (1) が得られる. また, (2) は, 関数方程式より明らかである.

そこで, この両者をつなぐ関数 $F_{\alpha,\beta}(x)$ については, 次の事が成立する.

定理 1. $F_{\alpha,\beta}(x)$ は, 特異関数である.

証明. $\beta > 0$ の場合, $F_{\alpha,\beta}(x)$ における可算無限個の flat な区間の和集合を G とおくと, G の測度 $\mu(G)$ は,

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta(1-\beta)^{n-1} = 1$$

であるから, $E = [0, 1] - G$ とおくと, $\mu(E) = 0$ である. また, 関数方程式から, 関数 $F_{\alpha,\beta}(x)$ のグラフの自己相似性が従い, $F_{\alpha,\beta}(x)$ が零集合 E の上だけで増加する, 単調な特異関数である. また, $\beta = 0$ の場合も明らかである. \square

2. 次に, いたるところ微分不可能な連続関係である Weierstrass 関数が, 一般的に, カオス力学系である Tchebycheff 多項式と関係づけられていることを報告する. いたるところ微分不可能な連続関数の最初の例として, Weierstrass は,

$$W_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

を与えた. 但し, $0 < a < 1$ で b は, $ab > 1 + 3\pi/2$ を満たす奇数である. この条件は, 後に Hardy によって, b は $ab \geq 1$ を満たす実数で良いことが示された. 一方, 特に $b=2$ の時に, 山口, 畑は [2] の中で, 次の事を示している.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \phi^n(x) = \frac{1}{2(1-a)} - \frac{1}{2} W_{a,2}(2/\pi \text{Arc sin } \sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

(但し, $1/2 \leq a < 1$ で, $\phi^n(x)$ は, ϕ の n 回合成を示す). 上式は, 典型的な単位区間上のカオス力学系 $\phi(x) = 4x(1-x)$ の母関数と, Weierstrass 関数 $W_{a,2}(x)$ との関係を表している点で, 興味深い.

このアイデアは, 自然に b が 2 以上の自然数の場合に, 一般化される事を以下に示そう. $T_b(x) = \cos(b \text{Arc cos } x)$ を b 次の Tchebycheff 多項式とする. (特に, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ で, これは $\phi(x) = 4x(1-x)$ と位相共役である事に注意.) この時, 上式の一般化として,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n T_b^n(x) = W_{a,b} \left(\frac{1}{\pi} \text{Arc cos } x \right), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

(但し, $0 < a < 1$ で, b は $ab \geq 1$ を満たす自然数) を得る. $T_b^n(x)$ は T_b の n 回合成であり, そのラップ数は b^n である事から, $T_b(x)$ の位相エントロピーは $\log b$ である. この意味において, $T_b(x)$ は, $[-1, 1]$ 上の力学系としてカオス的である.

謝辞. この小文を書くにあたり, 山口昌哉, 畑政義, 加古富志雄先生, また, レフェリーの先生には貴重な助言を頂いた. ここに感謝の意を表したい.

文 献

- [1] Hata, M., and Yamaguti, M., Takagi Function and Its Generalization, Japan J. Appl. Math., 1, 183-199 (1984).
 [2] Yamaguti, M., and Hata, M., Weierstrass's Function and Chaos, Hokkaido. Math. J., 12, 333-342 (1983).
 [3] 山口, 畑, 木上, フラクタルの数理, 岩波書店 (1993).
 (1997年3月17日提出)
 (かわむら きこ: 奈良女子大学理学部)