UNA SUCESIÓN DE PROBLEMAS SEMIGRUPOS

J. W. NEUBERGER

1. Introdución

Este libro consiste en una sucesión de problemas que da un desarollo de una variedad de aspectos del campo semigrupos de operadores. Fué escrito en el estilo 'Método Discubremiento' (Método Tejano, Método de (R.L.) Moore...) en que hay dado definiciones y problemas pero sin soluciones. La idea es de dar una oportunidad al lector para descubrir pasos importantes en el desarollo. Es la esperanza que este estilo dirigirá el lector mas rapidamente a investigaciones independientes. Se necescitaría un libro mucho mas grande dar una sucesión completo. Quiero aquí dar solomente unas ideas importante en un variedad del sujetos en el campo de semigrupos de operadores, no lineales así como lineales.

2. La idea de un semigrupo

Definición 1. Un semigrupo sobre un cojunto X es una función T con domino $[0, \infty)$ y rango en el cojunto de todas las funciones desde todo de X a X tal que

$$T(0) = I, \quad T(t)T(s) = T(t + s), \ t, s \geq 0, \tag{1}$$

donde $T(t)T(s)$ indique la composición de las transformaciones $T(s)$ y $T(t)$ y I es la transformación de identidad de X a X.

Problema 1. Sea X un subconjuto de un espacio de Banach X_0 y F una función $X \to X$ tal que si $x \in X$ existe unicamente $z : [0, \infty) \to X$ tal que

$$z(0) = x, \ z'(t) = F(z(t)), \ t \geq 0. \tag{2}$$

Denotamos con T la función con domino $[0, \infty)$ y rango en el conjunto de todas las transformaciones $X \to X$ tal que si $x \in X$ y $s \geq 0$, entonces

$$T(s)x = z(s)$$

donde z satisface (2). Enseñe que T verifique (1).

Se puede decir que en este caso, F es el generador de T. Actualmente, se usan esta palabra en al menos tres maneras en la teoría de semigrupos:

- Como una función F por lo cual soluciones z de (2) sirve de definir el semigrupo
- Para un semigrupo T sobre X,
$$F \; = \; \{(x,y) \in X^2 : y = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x)\}$$
- Dado un semigrupo T, el genrador es una transformación F desde cual se puede reconsruir T por medio de una formula exponenciál (como en unas Problemas mas tarde)

Es preciso especificar en cual sentido se quiere en una discusión (sentido $1, 2$ ó 3) pero en muchos casos, una transformació F es un generador en todos estes sentidos.

Queremos estudiar la propriadad (1).

Problema 2. Sea g es una función continua de $[0, \infty)$ a R tal que
$$g(x)g(y) = g(x+y), \; x, y \in [0, \infty). \tag{3}$$
Pruebe que $g(x) = 0, x \geq 0$ ó existe $b \in R$ tal que $g(x) = e^{bx}, x \geq 0$.

Hay soluciones g a (3) que no son continuas y en consecuencia no tienen forma exponencial. Se puede usar una base de Hamel de R, los numeros reales, para obtener ejemplos (pero en una manera no constuctivo).

Definición 2. Sea X es un espacio topológico, se dice que T es fuerte continua si para cada $x \in X$ la función g tal que
$$g(t) \; = \; T(t)x, \; t \geq 0 \tag{4}$$
es continua. En general, si T es un semigrupo sobre el conjunto X, $x \in X$ y g satisface (4), g se llama una trayectoría de T.

Si un semigrupo T está construido por medio de (2), es claro que T es fuerte continuo. Los problemas que siguen da ejemplos de semigrupos, algunos que son fuerte contínuos.

Problema 3. Sea $X = [0, 1]$ y T el semigrupo sobre X tal que
$$T(t)x = \frac{x}{1+tx}, \; x \in X, \; t \geq 0.$$

Busque una función F tal que T es generado por medio de (2) en el primer sentido.

Problema 4. Sea $X = [0, 1]$ y T el semigrupo sobre X tal que

$$T(t)x = x - t \text{ si } x \in [0, 1],\ t \geq 0 \text{ y } x - t \geq 0.$$

y

$$T(t)x = 0 \text{ si } x \in [0, 1],\ t \geq 0 \text{ y } x - t < 0.$$

¿Hay un generador para T en el sentido de (2)? Se puede cambiar el sentido de solución en (2). Se puede requerir solamente que 'derivada' es 'derivada a la derecha' y que la función resultada z es continua.

Problema 5. Sea $X = C([-1, 1])$ de todas funciones continuas de $[-1, 1]$ a R con norma

$$\|f\| \ = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)|.$$

Denotamos por F la función tal que

$$F(x) = x,\ x \in [-1, 0] \text{ y } F(x) = 2x,\ x \in (0, 1].$$

Definimos el semigrupo T sobre $C([-1, 1])$ tal que

$$(T(t)f)(x) \ = \ F(t + F^{-1}(f(x))),\ \ x \in [-1, 1],\ t \geq 0.$$

Haga una investigación de las posibilidades de un generador en el segundo sentido. Este ejemplo es de G.F. Webb ([29]) y era de importancia en el desarollo de la teoría de semigrupos nolineales.

Problema 6. Sea $X = \ell_2$, el espacio de Hilbert de todas sucesiones $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\Sigma_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ con $\|x\| = (\Sigma_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{1/2},\ x \in \ell_2$. Definimos el semigrupo T sobre X tal que

$$T(t)(x_1, x_2, x_3, \dots) \ = \ (e^{-t}x_1, , e^{-2t}x_2, e^{-3t}x3, \dots).$$

Pruebe que T es fuerte continuo y piense en la posibilidad de un generador.

Problema 7. Sea $X = C([0, \infty)$ de todas funciones continuas y acotadas de $[0, \infty)$ a R con norma $\|f\| = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$. Definimos el semigrupo T sobre X tal que

$$(T(t)f)(x) \ = f(x + t),\ x, t \geq 0.$$

¿Es T fuerte continuo?

Problema 8. Este este es lo mismo que Problema 7 pero con X el conjunto de todas funciones uniformemente continuas y acotadas de $[0, \infty)$ a R. ¿Es el T que resulta fuerte continuo?

Problema 9. Denotamos por A el generador del semigrupo en Problema 8 y notamos que $Af = f' \in X$ si f es en el domino de A. Enseñe que si $g \in X$ (X como en Problema 8) y $\lambda > 0$ entonces existe una y solamente una $f \in X$ tal que f está en el domino de A y

$$f - \lambda A f \ = \ g.$$

Demuestre que esta función f está dado por

$$f(x) \ = \ \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-r/\lambda} g(r + x) \, dr, \ x \geq 0. \tag{5}$$

En un sentido, f es la transformación de Laplace de g.

Vamos a ver que la transformación de Laplace es muy importante en la teoría de semigrupos, lineales y nolineales.

3. Semigrupos Lineales Continuos

En esta parte, supongamos que X es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y T es un semigrupo sobre X tal que $T(t) \in L(X,X), t \geq 0$ donde $L(X,X)$ representa el anillo de todas transformaciones lineales continuas de X a X. Si $B \in L(X,X)$ denotamos por $|B|$ la norma de B, es decir, el numero no negativo mas peq̃ueno tal que

$$\|Bx\| \ \leq |B| \ \|x\|, \ x \in X.$$

Definición 3. Se dice que T es continua si T sea continua como una funciõn de $[0, \infty) \to L(X,X)$.

Vamos a ver que la diferencia entre Definición 3 y Definición 2 es muy importante. Es la diferencia entre ecuaciones diferentiales ordinarios y ecuaciones diferenciales parciales - una gran diferencia! Notamos que 'fuerte continua' en (2) es una noción mas debil que 'continua' en (3).

Trabajamos con semigrupos continuos en esta sección y con semigroupos fuerte continuos en una sección que sigue. Para problemas 10 a 15 supongamos que T sea un semigrupo continua sobre el espacio de Banach X.

Problema 10. Si $t, s \geq 0$, pruebe que

$$(T(t) - I) \int_0^s T(r) \, dr = \ (T(s) - I) \int_0^t T(r) \, dr. \tag{6}$$

Problema 11. Si $s > 0$ pruebe que

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} (T(t) - I) \frac{1}{s} \int_0^s T(r) \, dr$$

existe en $L(X,X)$.

Problema 12. Pruebe que

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int_0^s T(r) dr \ = \ I.$$

Problema 13. Pruebe que existe $B \in L(X,X)$ tal que

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} (T(t) - I) \ = \ B.$$

Note que B es el generador de T en el segundo sentido.

Problema 14. Pruebe que

$$T'(t) \ = \ BT(t), \ t \geq 0$$

y

$$T(t) \ = \ I + \int_0^t BT(r)\, dr, \ t \geq 0.$$

Problema 15. Pruebe que

$$T(t) \ = \ e^{tB} = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(tB)^n}{n!}, \ t \geq 0$$

donde la serie converge en la norma de $L(X,X)$.

Problema 16. Dado f_0 continuo de $[0,\infty) \to \infty$ y sea $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de funciones $[0,\infty) \to X$ tal que

$$f_n(t) = I + \int_0^t Bf_{n-1}(r)\, dr, \ t \geq 0, n = 1, 2, \ldots.$$

Pruebe que

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \ \leq \ |B| \int_0^t \|f_n(r) - f_{n-1}(r)\|\, dr, \ t \geq 0, \ n = 1, 2, \ldots,$$

y si $c > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq K \frac{|B|^n}{n!}, \ t \in [0,c], n = 1, 2, \ldots.$$

Problema 17. Pruebe que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente Cauchy sobre $[0,c]$ para cada $c > 0$. Denotando por f la función con domino $[0,\infty)$ tal que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en cada $[0,c]$ por cada $c > 0$. Pruebe que

$$f(t) = I + \int_0^t Bf(t)\, dt, \ t \geq 0.$$

Se puede ver desde Problemas 10 - 15 que si empezamos con un semigroupo continua resulta que hay un generador B con lo cual podemos reconstruir T. Al otro lado, si empezamos con $B \in L(X,X)$ podemos constuir un semigroupo T que tiene B como su generador.

4. Semigrupos de Descenso Mas Rapido

Hay dos motivos para las problemas en esta sección. Una es de describir una clase importante de semigrupos. La otra es de intoducir una teoría de descenso mas rapido para ecuaciones diferenciales parciales.

Para esta sección, denotamos con H un espacio de Hilbert. Usamos el hecho que si f es una función lineal y continua de H a R (es decir, un miembro del espacio dual H^* de H), entonces existe $y \in H$ tal que

$$f(x) \ = \ \langle x, y \rangle_H, \ x \in H. \tag{7}$$

(Teorema de representation).

Definición 4. Sea $\phi : H \to [0, \infty)$. Decimos que ϕ tiene derivada de Fréchet a $x \in H$ si

$$x \in \text{ un abierto } \subset D(\phi)$$

y existe $f \in H^*$ tal que si $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\phi(x+h) - \phi(x) - f(h)| \ \leq \ \epsilon \|h\|, \ \|h\| < \delta, \ x + h \in D(\phi).$$

Podemos definir $\nabla\phi$ tal que si ϕ tiene una derivada a $x \in D(\phi)$ entonces

$$\phi'(x)h \ = \ \langle h, (\nabla\phi)(x) \rangle_H, \ x \in D(\phi'), \ h \ H.$$

La función $\nabla\phi$ se llama gradiente de ϕ. Se dice que $\nabla\phi$ es una gradiente de Sobolev si H es un espacio de Sobolev.

De aquí y en adelante en esta sección supongamos que la gradiente $\nabla\phi$ sea definida en todo de H y $\nabla\phi$ es localmente lipschitz, es decir, si $x \in H$ existe $\delta, M > 0$ tal que

$$\|(\nabla\phi)(w) - (\nabla\phi)(y)\|_H \ \leq \ M\|w - y\|_H \text{ si } \|w - x\|, \|y - x\| \leq \delta.$$

En los problemas que siguen, usamos el teorema fundamental de existencia y unicidad de ecuaciones ordinarias:

Teorema 1. *Sea X un espacio de Banach, $d_0, r > 0, (a, b) \in R \times X$ y f una función de $\Omega = [a - d_0, a + d_0] \times B_r(b) \to X$ tal que existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq M\|x - y\|, \ (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Entonces hay $d \in (0, d_0)$ y única función $z \to (a-d, a+d) \to X$ tal que

$$z(a) = b,\ z'(t) = f(t, z(t)),\ t \in (a-d, a+d).$$

Se puede probarlo como el método be aproximaciones sucesivas como en Problema 16.

Sea $x \in H$ y denote por z la función tal que

$$z(0) = x,\ z'(t) \ = \ -(\nabla\phi)(z(t)),\ t \in [0, b) \tag{8}$$

donde b está escogido ser tan grande que sea posible, quizás $b = \infty$.

Problema 18.

$$\phi(z)'(t) \ = \ -\|(\nabla\phi)(z(t))\|^2,\ t \in [0, b).$$

Se usan la regla de cadena para derivadas de Fréchet, aplicando a $\phi(z)$.

Problema 19. Sea $c > 0$ y h una función de clase C^1 (es decir tiene derivada continua) cuyo domino contiene $[0, c)$ y su rango es subcojunto del espacio de Banach X. Si existe $M > 0$ tal que

$$\int_0^t \|h'\| \ \le \ M,\ t \in [0, c),$$

entonces

$$\lim_{t \to c-} h(t) \text{ existe.}$$

Problema 20. El numero b en Problem 18 es egual a ∞.

Problemas 18 - 20 nos permiten definir un semigrupo T_ϕ generado por $-(\nabla\phi)$, gracias a Problema 1.

Problema 21. Pruebe que si $x \in H$ y

$$u \ = \ \lim_{t \to \infty} T_\phi(t)x \text{ existe,} \tag{9}$$

entonces

$$(\nabla\phi)(u) = 0.$$

El estudio de límetes como en (9) es muy importante en la teoría de semigrupos. Para muchos problemas en la teoría de ecuaciones diferenciales en una forma variacional (representada por una función ϕ) los puntos críticos de ϕ son las soluciones del problema. Problemas 22-30 da un ejemplo. Vease las notas para referencias a las aplicaciones extensivas. Si un sistema de ecuaciones no tiene una forma variacional convencional, se puede muchas veces consruir una función ϕ tal que sus ceros son soluciones. Vamos a ilustrar este por medio de un ejemplo casi lo mas sencillo posible, el problema de encontrar y con domino $[0, 1]$ tal que

$$y' - y = 0. \tag{10}$$

Sabemos que y satisface (10) si y solo si existe $c \in R$ tal que

$$y(t) \;=\; ce^t,\ t \in [0, 1]$$

pero no sería malo estudiar un nuevo método en por medio de un ejemplo muy sencillo.

Podemos tratar de poner (10) en forma variacional por medio de definir ϕ tal que

$$\phi(y) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 (y' - y)^2,\ y \in H. \tag{11}$$

¿Pero, como escoger H? Si $H = L_2([0, 1])$, entonces ϕ tiene por domino un cojunto lineal denso en H. Mas, ϕ no es continua. No hay una gradiente en un sentido útil. Vamos a introducir un espacio de Sobolev que nos sirve bien. Es el ejemplo mas sencillo en un espacio de Sobolev.

Desigamos por G_1 el conjunto

$$\{\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} : u \in C^1([0, 1])\}$$

Claro que G_1 es un subespacio de $L_2([0, 1])^2$ con norma

$$\|\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\|_{L_2([0,1])^2} = (\|f\|^2 + \|g\|^2)^{1/2}.$$

Problema 22. Sea G_2 la clausura de G_1. Pruebe que no hay dos miembros de G_2 con la misma terma primera.

Designamos por

$$H = H^{1,2}([0, 1])$$

el espacio de todas termas primeras de miembros de G_2. Si $\binom{f}{g} \in G_2$, escribimos f' por g y decimos que g es la derivada en sentido generalizado de f. Escribimos g como f'. Para norma en este espacio H tomamos

$$\|f\|_H \;=\; (\|f\|^2_{L_2([0,1])} + \|f'\|^2_{L_2([0,1])})^{1/2}. \tag{12}$$

Problema 23. Pruebe que ϕ en (11) es continua si $H = H^{1,2}([0,1])$.

Queremos encontrar una expresión para $\nabla\phi$ donde ϕ sea definida en (11).

Problema 24. Demuestre que si

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \in (L_2([0,1]))^2$$

y

$$\langle \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \rangle^2_{L_2([0,1])} = 0,\ u \in H$$

entonces

$$v \in H,\ w = h' \text{ y } v(0) = 0 = v(1).$$

Problema 25. Construya la proyección P de todo de $L_2([0,1])^2$ al

$$\{\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} : u \in H\}.$$

Para hacerlo, sea $\binom{f}{g} \in L_2([0,1])^2$ y busque $u \in H$ tal que

$$\| \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \|^2_{L_2([0,1])^2}$$

es minimo; es decir, busque $u, v \in H$ tal que

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} v' \\ v \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \;\text{ y }\; v(0) = 0 = v(1). \tag{13}$$

En las notas hay referencias que contiene información extensiva de las proyecciones que se encuentra in la constución de gradientes de Sobolev.

Problema 26. Resuelva el sistema (13). Observe que, gracias a Problema 24, hay solamente un par (u, v) que satisface (13). Demuestre, donde

$$S(t) \;=\; \sinh(t);\; C(t) \;=\; \cosh(t),\; t \in R,$$

que

$$u(t) \;=\; [C(1-t)\int_0^t ((C(r)f(r) + S(r)g(r))\,dr +$$
$$C(t)\int_t^1 ((C(1-r)f(r) - S(1-r)g(r))\,dr)]/S(1),\ t \in [0,1].$$

Problema 27. Con ϕ en (11), demuestre que

$$(\phi'(y))h \;=\; \int_0^1 (y'-y)(h'-h),\ y, h\ H.$$

Problema 28. Con ϕ en (11), P como en Problem 25 y

$$\pi : L_2([0,1])^2 \to L_2([0,1]) \text{ definida por}$$

definida por

$$\pi\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \;=\; f,\ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L_2([0,1])^2.$$

Demuestre que

$$(\nabla\phi)(y) \;=\; \pi P\begin{pmatrix} y-y' \\ y'-y \end{pmatrix},\ y \in H. \tag{14}$$

Problema 29. Determine una forma sencillo para $\nabla\phi$ en Problem 28, usando Problema 26.

Problema 30. Busque una forma para la solución z a (8) usando la gradiente en Problema 29 y busque una forma para u en (9). Observe que esta límite dependiente en el escogido de $z(0)$ en (8). Observe también que este límite u es el elemento mas cerca de $z(0)$ en la norma de $H^{1,2}([0,1])$.

Por la mayor parte no se puede encontrar una forma para la gradiente $\nabla\phi$ en casos complicados. Para usar la teoría arriba se puede tratar de probar que el límite u en (9) existe y es un cero de ϕ (ó en algunos casos es un punto crítico). Además, se puede tratar de seguir una trayectoría z numericamente. Algunas de los problemas que siguen en esta sección trata de existencia. Vamos ahora a trabajar con unos problemas numericos. Usamos el mismo ejemplo arriba pero en una forma discreta.

Sea $n > 2$ un entero. Definimos

$$\delta \;=\; 1/n,$$

Sea

$$\phi_n : R^{n+1} \to R$$

tal que

$$\phi_n(y_0, y_1, \ldots, y_n) \ = \ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\frac{y_k - y_{k-1}}{\delta} + \frac{y_k + y_{k-1}}{2})^2,$$

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in R^{n+1}.$$

Problema 31. Demuestre una forma para

$$\nabla\phi_n,$$

la gradiente convencional de ϕ_n, es decir, una lista (de longitud $n+1$) de derivadas parciales de ϕ_n.

Problema 32. Pruebe que

$$\phi_n'(y)h \ = \ \langle h, (\nabla\phi_n)(y)\rangle_{R^{n+1}}, \ h, y \in R^{n+1}. \tag{15}$$

Problema 33. Si

$$y \ = \ (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in R^{n+1},$$

busque el numero $\alpha_{n,y}$ único tal que

$$\phi_n(y - \alpha_{n,y}(\nabla\phi)(y)) \text{ es minimo.}$$

(Busque una expresión explicita usando el producto interno usual en R^{n+1}.)

Problema 34. Pruebe que la iteración:

$$y \ \to \ y - \alpha_{n,y}(\nabla\phi)(y) \tag{16}$$

converge a un limite u y

$$\phi_n(u) \ = \ 0.$$

Problema 35. Escriba un programa para una computadora que se permite segiur la iteración en Problema 16. (Escoga $n = 10, n = 20, n = 100$ y devuelva sus resultas.)

Definición 5. Definimos una segunda norma para R^{n+1} dicho $\|\cdot\|_{S_n}$:

$$\|y\|_{S_n} \ = \ (\sum_{k=1}^{n}(\frac{y_k - y_{k-1}}{\delta} + \frac{y_k + y_{k-1}}{2})^{1/2},$$

imitando la norma en $H^{1,2}([0,1])$ en (12).

Definición 6. Definimos dos transformaciones lineales D_0, D_1

$$D_0, D_1, R^{n+1} \to R^n$$

tal que si

$$y \ = \ (y_0, y_1, \ldots, y_n) \ \in R^{n+1},$$

entonces

$$D_0 y \ = \ \{\frac{y_1 + y_0}{2}, \ldots, \frac{y_n + y_{n-1}}{2}\}$$

y

$$D_1 y \ = \ \{\frac{y_1 - y_0}{\delta}, \ldots, \frac{y_n - y_{n-1}}{\delta}\}$$

Definición 7.

$$\nabla_{S_n} \phi_n$$

es la función:

$$R^{n+1} \to R^{n+1}$$

tal que

$$(\phi_n)'(y)h \ = \ \langle h, (\nabla_{S_n} \phi_n)(y) \rangle_{S_n}, \ h, y \in R^{n+1}.$$

(Se puede representar una función lineal $R^{n+1} \to R$ con cualquier producto interno definida en R^{n+1}.)

Definición 8. Sea D la transformación

$$R^{n+1} \to (R^n)^2$$

tal que

$$Du = \begin{pmatrix} D_0 u \\ D_1 u \end{pmatrix}, \ u \in R^{n+1}.$$

Problema 36. Pruebe que si $u, v \in R^{n+1}$,

$$\langle u, v \rangle_{S_n} \ = \ \langle Du, Dv \rangle_{(R^n)^2}.$$

Problema 37. Sea $y \in R^{n+1}$. Para

$$(\nabla_{S_n} \phi_n)(y)$$

en la Definición 7, pruebe que

$$(\nabla_{S_n} \phi_n)(y) \ = \ (D^t D)^{-1} (\nabla \phi_n)(y),$$

donde $(\nabla \phi_n)(y)$ es la gradiente convencinal de ϕ_n a y.

Problema 38. Sea P la proyectión de $(R^n)^2$ al rango D en Problema 37. Pruebe que

$$P \;=\; D(D^tD)^{-1}D^t.$$

El Caso General Otro Vez

Definición 9. Sea ϕ una función de un espacio de Hilbert H a $[0,\infty)$ de clase C^1 que tiene una gradiente localmente lipschiz y $\Omega \subset H$. Se dice que ϕ satiface una desigualdad gradiente sobre Ω si existe $c > 0$ tal que

$$\|(\nabla\phi)(x)\|_H \;\geq\; c(\phi(x))^{1/2}, \quad \text{si } x \in \Omega. \tag{17}$$

Problema 39. Sea H un espacio de Hilbert, ϕ una función de H a $[0,\infty)$ tal que $\nabla\phi$ es localmente lipschitz, $x \in H$ y z la solución única de

$$z(0) = x,\; z'(t) \;=\; -(\nabla\phi)(z(t)),\; t \geq 0.$$

Sea también que $\Omega \subset H$ en que ϕ se verifice una desigualdad de gradiente (17) en Ω con constante c. Demuestre que si rango $z \subset \Omega$ entonces si $a \geq 0$,

$$(\phi(z))'(t) \;\leq\; -c^2\phi(z(t)),\; t \geq 0$$

y por consecuencia

$$\phi(z(t)) \;\leq \phi(z(a))e^{-c^2(t-a))},\; t \geq a.$$

Problema 40. Demuestre para z en Problema 39 que

$$u \;=\; \lim_{t\to\infty} z(t) \text{ existe}$$

y

$$\phi(u) \;=\; 0.$$

El problema que sigue trata de problemas lineales.

Problema 41. Sea H, K dos espacios de Hilbert, $G \in L(H,K)$ y $h \in K$. Definimos

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{2}\|Gx - h\|_H^2,\; x \in H.$$

Designamos por G^* el elemento de $L(K,H)$ tal que

$$\langle Gx, y\rangle_K \;=\; \langle x, G^*y\rangle_H,\; x \in H,\; y \in K.$$

Demuestra que

$$(\nabla\phi)(x) \;=\; G^*Gx - G^*h,\; x \in H.$$

Problema 42. Por $\nabla\phi$ en Problem 41, $x \in H$ y z la solución única de

$$z(0) \;= x,\; z'(t) \;=\; -(\nabla\phi)(z(t)),\; t \geq 0$$

demuestra que

$$z(t) \;=\; e^{-tG^*G}x \;+\; \int_0^t e^{-(t-s)G^*G}G^*h\, ds.$$

(fórmula de variación de parametros en ecuaciones diferentiales ordinarios).

Problema 43. Para z en Problema 42 demuestre que

$$\lim_{t\to\infty} G(z(t)) \;=\; h.$$

Problema 44. Para z en Problem 42 demuestre que si $h \in$ rango G

$$u \;=\; \lim z(t) \text{ existe y } \; Gu \;= h.$$

5. Semigrupos Lineales Fuerte Continuos

Sea X un espacio de Banach. Aquí estudiamos la clase de semigrupos lineales, fuerte continuos T con la propriadad que $|T(t)| \leq 1,\ t \geq 0$, es decir, T es un fuerte continuo semigrupo lineal de contracciones. Esta última propriadad hace un poco mas fácil nuestra investigación y el caso general sigue desde este caso especial. Primero usamos un generador de T en el segundo sentido:

$$A = \{(x, y) \in X^2 : y = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x)\}. \tag{18}$$

Para cada $\lambda > 0$ definimos I_λ, la transformación tal que

$$I_\lambda x \ = \ \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-r/\lambda} T(r)x \, dr, \ x \in X. \tag{19}$$

Problema 45. Demuestre que si $\lambda > 0,\ |I_\lambda| \leq 1$.

Problema 46. Demuestre que si $x \in X,\ \lim_{\lambda \to 0+} I_\lambda x = x$.

Problema 47. Pruebe que si $x \in X$, entonces $I_\lambda x \in D(A)$, $D(A)$ siendo el domino de A.

Problema 48. Enseñe que si $\lambda > 0$ y $x \in X$,

$$(I - \lambda A) I_\lambda x = x,$$

resulta que $I - \lambda A$ es un inverso a la izquerda para I_λ.

Problema 49. Demuestre que si $x \in D(A)$, entonces

$$I_\lambda (I - \lambda A) x = x.$$

Un poquito de ayuda es en el problema que sigue.

Problema 50. Sea $x \in D(A)$ y defina $h : [0, \infty) \to X$ como

$$h(t) = T(t)x, \ t \geq 0. \tag{20}$$

Demuestra que la derivada a la derecha h^+ de h existe en todo de $[0, \infty)$ y $h^+(t) = T(t)Ax,\ t \geq 0$. Observe también que h^+ es continua. Demuestra que en general si una función en $[0, \infty)$ tiene una derivada a la derecha continua, entonces esta derivada es una verdadera derivada.

Despues de Problema 50, tenemos que h como en (20) una trayectoria de T) se verifica

$$h'(t) \ = \ T(t)Ax, \ t \geq 0,$$

y, de otra manera,

$$h'(t) \;=\; AT(t)x,\; t \geq 0. \tag{21}$$

En consecuencia, las trayectorias son soluciones (21) si empieza en un punto que pertenece al domino de A. Las otras trayectorias son límites (llamado a veces, soluciones generizadas) de las soluciones verdaderas.

Problema 51. Demuestre que A sea cerrado como un subconjunto de $X \times X$.

Problema 52. Demuestre que $A \in L(X,X)$ si y solo si $D(A) = X$. (Use el 'teorema de gráfica cerrada'.)

Problema 53. Sea $\lambda > 0,\;\; x \in X$ y m, n son enteros. Demuestre que

$$I^m_{\lambda/n}x$$
$$= (\frac{n}{\lambda})^m \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(n/\lambda)(s_m+\cdots+s_1)} T(s_m+\cdots+s_1)x\; ds_m \cdots ds_1 =$$

$$(\frac{n}{\lambda})^n \int_0^\infty e^{-sm/\lambda} \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} T(s)x\; ds.$$

En partiular,

$$(I_{\lambda/n})^n = \int_0^\infty T(s)x\; d\phi_{\lambda,n}(s)$$

donde

$$\phi_{\lambda,n}(s) \;=\; 1 - \Sigma_{k=0}^{n-1} e^{-ns/\lambda} \frac{(ns/\lambda)^k}{k!},\; s \geq 0. \tag{22}$$

Se puede ver que (22) es una distribución culmulativa de Poisson. La teoría de semigrupos tiene una gran conección con el campo de probabilidad ([9] por ejemplo). Hay muchas aplicaciones de semigrupos a probibilidad pero hay aplicaciones importantes en la otra dirección. Calculaciones en Problem 53 son no mas que la calculación de la distrbución de la suma de una sucesión de de variables desaciertos independientes con la misma distribución exponencial. En el problema que sigue, la resulta no es mas que una aplicación de un teorema de límite central. Por supuesto, se puede probarlo como un teorema en análisis también pero es bueno ver Problemas

53,54 como ejercicios en probabilidad. Qizás sea mas fácil aprender algo mas de probabilidad antes de trabajar con 53, 54, pero no es necesario.

Problema 54. Sea $x \in X$ y $\lambda \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty}(I-(\lambda/n)A)^{-n}x \ = T(\lambda)x. \tag{23}$$

Problema 54 da, esencialmente, la mitad del teorema famoso de Hille-Yosida para semigrupos contracciones fuerte continuas: Dado tal semigrupo, defina su generado (en el segundo sentido) y reconstruya el semigrupo por medio de una formula exponencial (23).

Los problemas que siguen en esta sección hacen la otra parte: Sea A una transformación con domino denso en X, con la propriedad que $(I-\lambda A)^{-1}$ existe con domino todo de X y $|(I-\lambda A)^{-1}| \leq 1$. Queremos construir un semigrupo T que tiene A como su generador. Si $\lambda > 0$ designamos

$$A(I-\lambda A)^{-1} = (1/\lambda)((I-\lambda A)^{-1} - I) \text{ por } A_\lambda,$$

la aproximación Yosida de A.

Problema 55. Pruebe que si $x \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda\to 0+} A_\lambda x = Ax.$$

Si $\lambda > 0$ designamos por T_λ el semigrupo con generador $A_\lambda,\ t \geq 0$, es decir,

$$T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}.$$

Problema 56.

$$|T_\lambda(t)| \leq 1,\ t \geq 0.$$

Problema 57. Sea $\alpha, \beta > 0$. Demuestre que

$$\|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \ \leq \ \|A_\alpha x - A_\beta x\|,\ x \in X, t \geq 0.$$

Problema 58. Demuestre que existe un semigrupo T, fuerte continuo de contracciones tal que

$$T(t)x \ = \ \lim_{\lambda\to 0+} T_\lambda(t)x,\ x \in X,\ t \geq 0.$$

Problema 59. Demuestre que

$$A \ = \ \{(x,y) \in X^2 : y = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x)\}. \tag{24}$$

Al fin de Problemas 47 - 59, se puede ver que si T sea un semigrupo de contracciones, fuerte continuo y lineal, entonces A, que satisface (24), es un generador en todos los tres sentidos.

Problema 60. Sea $X = L_2([0,1])$ y

$$A = \{(f,g) \in L_2([0,1])^2 : f, f' \in H^{1,2}([0,1]), f(0) = 0 = f(1)\}.$$

Demuestra que A es el generador de un semigrupo T de contracciones, fuerte continuo y lineal. Ademas pruebe que si $u : [0,\infty) \times [0,1]$ definido por

$$u(t,x) = (T(t)f)(x), \ t \geq 0, \ x \in [0,1],$$

entonces

$$u_1(t,x) = u_{2,2}(t,x), \ t \geq 0, \ x \in [0,1] \tag{25}$$

donde $u_1(t,x)$ es la derivada parcial de u en el primero lugar al punto (t,x), $u_{2,2}$ es la segunda derivada parcial de u en el segundo lugar y f esta una función dado en $L_2([0,1])$. Esta es la famosa ecuación de conducción de calor.

Ahora supongamos que T es un semigrupo lineale y fuerte continuo que no es una contración. Vamos a estudiarlo como aplicación de las resultas arribas.

Problema 61. Existe $M > 0$ tal que

$$|T(t)| \leq M, \ t \in [0,1]$$

(Recuerde el teorema de acotado uniformemente.)

Problema 62. Para M, T como en Problema 61 y $w = \ln(M)$ se verifica

$$|T(t)| \leq Me^{wt}, \ t \geq 0.$$

Problema 63. Para M, T, w como en Problema 62, defina un semigrupo S por

$$S(t) = e^{-wt}T(t), \ t \geq 0.$$

Pruebe que S es un semigrupo fuerte continuo y

$$|S(t)| \leq M, \ t \geq 0.$$

Problema 64. Para M, T, w, S como en Problema 63, defina una norma $\|\cdot\|'$ por medio de

$$\|x\|' = \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\|, \; x \in X.$$

Preube que la norma $\|\cdot\|'$ es equivalente a $\|\cdot\|$ en el sentido que existe k, K tal que

$$k\|x\|' \leq \|x\| \leq K\|x\|', \; x \in X.$$

Pruebe que S es un semigrupo de contracciones debajo la norma $\|\cdot\|'$.

Haga un análisis del semigrupo T por medio de un estudio de S, usando el hecho que S, debajo la norma $\|\cdot\|'$, es un semigrupo de la clase estudiado en Problems 47 - 59.

En (23) tenemos una generalación de la formula

$$e^x = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n, \; x \in R.$$

Problema 65. Dicusa la posibilidad de usar

$$\lim_{n \to \infty} (I + \lambda A)^n x, x \in X$$

en vez de (23).

Los dos problems que siguen trata de problemas numéricos con aproximaciones de semigrupos. Hay dos razones por estos dos problems. La primera es de introducir algunas ideas útiles numéricos y el segundo es de ilustrar la primera ley de analisis numerico: 'Dificuldades numéricos y dificuldades analíticos siempre vienen juntos'. Queremous ilustrar ésta con la ecuación de conducción de calor en Problema 25

Problema 66. Sea $n > 2$ un entero y

$$u^{0,k} = f(k/n), \; k = 0, 1, \ldots, n, \tag{26}$$

donde f esta la función dado en (25), aquí tomado continua. Dado $w > 0$ y un entero N, escribe un programa para una computadora para calcular

$$u^{j,k}, k = 1, \ldots, n-1, \; j = 1, 2, \ldots, N \tag{27}$$

tal que

$$u^{j,0}, \; u^{j,n} = 0, \; j = 1, \ldots, N \tag{28}$$

y

$$\frac{u^{j,k} - u^{j-1,k}}{\delta} = \frac{u^{j-1,k+1} - 2u^{j-1,k} + u^{j-1,k-1}}{h^2}, \tag{29}$$

$$k = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, 2, \ldots, N$$

donde

$$\delta = 1/n, \text{ y } h = w/N.$$

(Este método se llama explicito.)

Problema 67. Sea n, f, w, n, N como en Problema 66 y también que se verifice (26),(28). Escriba un programa en una computadora para calcular las cantidades en (27) usando el siguiente en vez de (29):

$$\frac{u^{j,k} - u^{j-1,k}}{\delta} = \frac{u^{j,k+1} - 2u^{j,k} + u^{j,k-1}}{h^2}. \tag{30}$$

Observe que es preciso resolver el sistema (30) para las cantidades en (27). Es uno sistema triangular. Se puede usar el método de eliminacion de Gauss, el método de Gauss-Seidel o otro método. Si n no es tan grande, se puede usar Mathematica. (Esta método se llama implicito.)

Problema 68. Cuando sus programas para Problems 66,67 sirve, haga una comparación entre el fenómeno numerical en 66,67 y el fenómeno analítico en 65,54. Piensa en la ley primera de análisis numerico.

6. Semigrupos de Contraciones No Lineales y Operadores Monotones

Sea H un espacio de Hilbert real.

Definición 10. Sea A una función con domino en H y con rango en el cojunto de todos subconjuntos de H. Se dice que A es monotone si

$$\langle u - v, x - y\rangle_H \ \geq \ 0 \ \text{ si } \ x, y \in H \ \text{ y } \ u \in Ax, \ v \in Ay.$$

Definición 11. Se dice que un operador A monotone es máximo si dado B, un operador monotone tal que

$$D(A) \subset D(B) \ \text{ y } \ Ax \subset Bx, \ x \in D(A),$$

entonces $B = A$.

Problema 69. Para el semigrupo T en Problema 4 defina

$$A \ = \ \{(x, y) \in [0, 1] \times R : y = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x)\}.$$

Pruebe que A es monotone y busque un operador monotone máximo con domino $D(A) = [0, 1]$ que contiene A en el sentido que

$$\text{si } \ x \in [0, 1], \ \text{entonces } \ Ax \in Bx.$$

Problema 70. Sea A es un operador monotone máximo con domino en H. Pruebe que si $\lambda > 0$,

$$\text{el rango de } \ I + \lambda A \ \text{ es todo de } \ H$$

en el sentido que

$$\cup_{x \in D(A)} Ax \ = \ H.$$

Problema 71. Con A como en Problema 70, pruebe que

$$(I + \lambda A)^{-1} \ \text{ existe y su rango es igual a } \ H.$$

Problema 72. Sea A un operador monotone con domino en H. Existe un operador monotone maximo B tal que

$$D(B) \ = \ D(A)$$

y si $x \in D(A)$, entonces

$$A(x) \ \subset \ B(x).$$

Definición 12. Sea A un operador monotone maximo. Designamos

$$(I + \lambda A)^{-1} \ \text{ por } \ I_\lambda.$$

Problema 73. Usando la notación en Problema 72, demuestre que si $\alpha \ \geq \beta \ > 0$, entonces

$$I_\alpha x \ = \ I_\beta(\frac{\beta}{\alpha}x + (1 - \frac{\beta}{\alpha})I_\alpha x), \ x \in H.$$

Problema 74. Sea A y $I_\lambda, \ \lambda \geq 0$ como en Problemas 72, 73, y $\alpha, \ \beta > 0$. Definimos

$$\lambda \ = \ \frac{\beta}{\alpha} \ \text{ y } \ \mu \ = \ 1 - \frac{\beta}{\alpha}$$

y

$$\phi_{k,j} \ = \ \|I_\beta^j x \ - \ I_\alpha^k x\|.$$

Pruebe que

$$\phi_{k,j} \ \leq \lambda\phi_{k-1,j-1} \ + \ \mu\phi_{k,j-1}, \ i,j = 1,2,\ldots.$$

En preparación para problema 76 tenemos un ejercicio en que se puede encontrar varias ideas de probabilidad que son utiles en Probelma 77. Tambien podemos ver otro ejemplo en que se puede aplicar ideas en probabilidad al desarollo de semigroupos. Veremos en Sección 8 una instancia en que se puede aplicar la teoría de semigrupos a el estudio de probabilidad.

Problema 75. Vamos a resolver numericamente el problema de encontrar u con domino un subconjunto de $\Omega \ = \ [0,1] \times [0,1]$ tal que

$$u_1(x,y) \ = \ u_2(x,y), \ (x,y) \ \in \Omega, \ u(0,x) = f(x), \ x \in [0,1], \tag{31}$$

donde u_1, u_2 denota derivadas paciales en las primeras y segunda lugares y f sea una función continua con domino $[0,1]$. Escogemos un entero $n > 2$ y dividimos el intérvalo desde el punto $(0,0)$ al $(0,1)$ en n pedazos iguales. Escogemos x tal que $0 < x \leq 1$ y definimos

$$v_{0,j} \ = \ f(j/n), \ j = 0,1,\ldots,n.$$

Con $\delta = 1/n$ y $h = x/n$ define inductivamente

$$v_{i,j}, \ j = 0,\ldots,i, \ i = 1,2,\ldots,n$$

tal que

$$\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h} \ = \ \frac{v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}}{\delta}, \ j = 0,\ldots,i, \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Demuestra que

$$(B_n^f)(x) \;=\; v_{n,n} \;=\; \Sigma_{k=0}^n \binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k} f(k/n)$$

Demuestra que si $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} (B_f^n)(x) \;=\; f(x)$$

(¿Aprenda primero algun mas de teoremas de lı́mites centrales?) Observe que si u satisface (31) entonces

$$u(x,y) \;=\; f(y-x),\; x,y \in [0,1],\; y-x \geq 0$$

lo que se espera si sirve este método de diferencias finitas.

Problema 76. Usando la notación de Problemas 72-74, pruebe que si $\alpha > 0$ y $x \in \overline{D(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} I^n_{\alpha/n} x \;\text{ existe .} \tag{32}$$

Problema 77. Sea $S:\; [0,\infty)$ es definida por

$$S(t)x \;=\; \lim_{n\to\infty} I^n_{t/n} x,\; t \geq 0,\; x \in \overline{D(A)}.$$

Pruebe que S es un semigrupo fuerte continuo de contracciones sobre $\overline{D(A)}$.

Esta es la mayor parte del famoso teorema de Crandall-Liggett.

Vease las notas para referencias, información histórica y una guı́a para problemas adicionales.

7. Semigrupos No Lineales por Métodos Lineales

En esta sección, denotamos por X un espacio métrico separado y completo.

Definición 13. Sea T un semigrupo sobre X y $g : [0, \infty) \times X \to X$ tal que

$$g(t, x) \; = \; T(t)x, \; t \in [0, \infty), \; x \in X.$$

Se dice que T es junto continuo si g es continuo.

Con T veine un semigrupo lineal S dicho un representación de T. Vamos a describirlo.

Definición 14. $C(X)$ representa el espacio de Banach de todas funciones $f : X \to R$ tal que f es continua y acotada. La norma en $C(X)$ es tal que

$$\|f\|_{C(X)} \; = \; \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Definición 15. La representación S de T es una función S con domino $[0, \infty)$ y rango en el conjunto de transformaciones $X \to X$ tal que

$$(S(t)f)(x) \; = \; f(T(t)x), \; f \in C(X), \; t \geq 0, \; x \in X.$$

Problema 78. Pruebe que S es un semigrupo lineal y

$$\|S(t)f\|_{C(X)} \; \leq \|f\|_{C(X)}, \; f \in C(X), \; t \geq 0,$$

es decir, S es un semigrupo de contracciones sobre $C(X)$.

Problema 79. Busque un ejemplo de un semigrupo S como en Problema (78) tal que S no es fuerte continuo.

Aquí hay otra topologiá para $C(X)$. Se presenta por medio de una noción de convergencia.

Definición 16. Se dice que la sucesión $f_1, f_2, \ldots$ en $C(X)$ converge a $f \in C(X)$ si

$$\text{existe } \; M > 0 \; \text{ tal que } \|f_n\| \; \leq \; M, \; n = 1, 2, \ldots,$$

y

$$f_1, f_2, \ldots \; \text{ converge uniformamente a } f \text{ en cada compacto en } \; X.$$

En este caso escribimos

$$\beta - \lim_{n \to \infty} f_n \; = \; f.$$

Problema 80. Pruebe que S en Problema 78 es β continuo en el sentido que si

$$f \in C(X) \;\text{ y }\; \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ en } (0, \infty), \text{ convergente a } 0,$$

entonces

$$\{S(t_n)f\}_{n=1}^{\infty} \;\text{ es convergente a } f.$$

Problema 81. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$, β convergente a $f \in C(X)$ y S es como en Problema 78 y $t \geq 0$. Preube que

$$\{S(t)f_n\}_{n=1}^{\infty} \;\text{ es }\; \beta \text{ convergente a } S(t)f.$$

Definición 17. Para S en Problema 78, el generador en sentido Lie (Sophus Lie) es

$$A \;=\; \{(f, g) \in C(X)^2 : g(x) \;=\; \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(f(T(t)x) - f(x)),\; x \in X.$$

Problema 82. A en Definición 17 es un derivación en el sentido que si $f, g \in D(A)$, entonces $fg \in D(A)$ y

$$A(fg) \;=\; f(Ag) \;+\; (Af)g.$$

Definición 18. Para $\lambda > 0$, T en Problema 78 definimos una transformación I_λ con domino $C(X)$ tal que

$$(I_\lambda f)(x) \;=\; \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-s/\lambda} f(T(s)x)\, ds,\; f \in C(X),\; x \in X.$$

Problema 83. Pruebe que si $\lambda > 0$,

$$(I - \lambda A)^{-1}$$

existe y

$$(I - \lambda A)^{-1} \;=\; I_\lambda.$$

Problema 84. Demueste que si λ y A son que en Problema 83, entonces

$$\|(I - \lambda A)^{-1} f\| \;\leq \|f\|,\; f \in C(X).$$

Problema 85. Con A en Problema 84 y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(0, \infty)$ convergente a 0, pruebe que

$$\beta - \lim_{n \to \infty} (I - t_n A)^{-1} f \;=\; f$$

y en consecuencia, A tiene domino denso en el sentido β.

Problema 86. Con A, T, S en esta sección y $\lambda > 0$, pruebe que

$$\beta - \lim_{n\to\infty} (I - \lambda/nA)^{-n} f \ = \ fT(\lambda), \ f \in C(X).$$

Definición 19. Un conjunto Q de transformaciones de $C(X)$ a $C(X)$ es β equi-continuo si para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, β convergete a $f \in C(X)$,

existe $M > 0$ tal que $\|Wf_n\|_{C(X)} \leq M, \ W \in Q, \ n = 1, 2, \ldots,$

y

si Ω es un compacto en X y $\epsilon > 0$, existe N tal que si $n > N$,

$$|(Wf_n)(x) - (Wf)(x)| < \epsilon, \ x \in \Omega, \ W \in Q.$$

Problema 87. Pruebe que si $\eta > 0$, entonces

$$\{(I - \lambda/nA)^{-n}, \ 0 \leq \lambda \leq \eta\}$$

es β equi-continuo.

Definición 20. Designamos por $LG(X)$ el conjunto de todas tranformaciones A lineales con domino y rango en $C(X)$ que tienen las propriedades en Problems 82,84,85,87, es decir,

- (i) A es una derivación,
- (ii) El domino de A es denso en $C(X)$ en el β sentido.
- (iii) Si $\lambda \geq 0, \ (I - \lambda A)^{-1}$ existe y es contracción en $L(C(X), C(X))$.
- (iv) Si $\eta \geq 0, \ \{I - (\lambda/n)A)^{-n}, \ 0 \leq \lambda \leq \eta\}$ es β equi-continuo.

Problema 88. Haga un teorema desde Problemas 78 - 87.

Para Problemas 88,89,91 supongamos que $A \in LG(X)$

Problema 89. Pruebe que existe un semigrupo lineal $\overline{V}$, fruete continuo (en norma de $C(X)$ sobre $\overline{D(A)}$ tal que

$$\overline{V}(t)f \ = \ \lim_{n\to\infty} (I_{\lambda/n}A)^{-n} f, \ \lambda > 0, f \in D(A).$$

(Use Problema 77.)

Problema 90. Pruebe que existe unica extención S de $\overline{V}$, S siendo un semigrupo lineal sobre todo de $C(X)$,tal que S es β fuerte continuo.

Problema 91. Pruebe que si S es en Problema 90, entonces

$$A = \{(f,g) \in C(X) : g = \beta - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(S(t)f - f)\}.$$

Problema 92. Sea η una trasformación lineal $C(X) \to R$ tal que η es $\beta-$ continuo y

$$\eta(fg) = \eta(f)\eta(g), \ f,g \in C(X).$$

Pruebe que existe $x \in X$ tal que

$$\eta(f) = f(x), \ f \in C(X).$$

(Quizás vease [7])

Problema 93. Para S en Problema 90,$t \geq 0, \ x \in X$ y η con domino $C(X)$ tal que

$$\eta(f) = (S(t)f)(x), \ f \in C(X),$$

pruebe que η es un transformatión como en Problem 92.

Problema 94. Para S en Problem 90, pruebe que existe un semigrupo único T sobre X que es junto continuo y

$$(S(t)f)(x) = f(T(t)x), \ t \geq 0, \ x \in X, \ f \in C(X).$$

Medidas y Extensiones Lineals de Semigrupos No Lineales

Definición 21. Designamos por $M(X)$ el conjunto de todas medidas μ de Borel en X y para $B(X)$ el conjunto de todos conjuntos de Borel en X.

Definición 22. Sea

$$\mu \in M(X) \text{ y rango}(\mu) \subset [0,\infty).$$

Decimos que μ es compacto regular si

$$\mu(\Omega) = \sup\{\mu(\Omega') \ : \ \Omega' \subset \Omega \text{ y es un compacto}\}$$

Definición 23. Mas general, decimos que $\mu \in M(X)$ es compacto regular si μ es la diferencia de dos compactos regulares que tienen rango en $[0,\infty)$. En este caso, decimos que $\mu \in MCR(X)$.

Definición 24. Sea T un semigrupo junto continuo sobre X. Decimos que U es el extensión lineal de T si U es una función con domino $[0,\infty)$ y

$$(U(t)\mu)(\Omega) = \mu\{T(t)^{-1}\Omega\}, \ t \geq 0, \ \Omega \in B(X), \mu \in MCR(X).$$

Decimos que U es la extensión lineal de T.

Problema 95. Pruebe que U en Definición 7 es un semigrupo sobre $MCR(X)$.

Definición 25. Para U en Definición 7, definimos

$$C = \{(\mu,\nu) \in MCR(X)^2 : \int_X f\ d\mu = \lim_{t\to\infty} \int_X \frac{1}{t}(f(T(t)) - f)\ d\mu,\ f \in C(X)\}.$$

(La integral es de Lebesgue.) Decimos qeu C es el generador extendido de T.

Definición 26. Designamos pr $C(X)^{*\beta}$ el espacio lineal de toda funciones g lineal,

$$g : C(X) \to R,$$

tal que g es continua en el sentido β.

Problema 96. Sea $\mu \in X$ y p es la función $C(X) \to R$ tal que

$$pf = \int_X f\ d\mu,\ f \in C(X).$$

Pruebe que

$$p \in C(X)^{*\beta}.$$

Problema 97. Sea $p \in C(X)^{*\beta}$. Pruebe que existe $\mu \in MCR(X)$ tal que

$$pf = \int_X f\ d\mu,\ f \in C(X).$$

(Qizás se necesita, para este problema, buscar algunas lemmas en [28].)

Problema 98. Para C en Problema 95, pruebe que

$$(I - \lambda C)^{-1} \text{ existe}$$

con domino todo de $MCR(X)$ y

$$|\int_X f\ d((I - \lambda C)^{-1}\mu)| \leq |\int_X f\ d\mu|,\ f \in C(X).$$

Problema 99. Para C en Problema 95, pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X fd((I - \lambda C)^{-n}\mu) = \int_X f\ d(U(\lambda)\mu),\ f \in C(X).$$

Problema 100. Para C en Problema 95, pruebe que existe $A \in LG(X)$ tal que

$$\int_X f\, d(C\mu) \; = \; \int_X Af\, d\mu. \tag{33}$$

Problema 101. Sea $A \in LG(X)$ y C es una transformación lineal

$$MCR(X) \to MCR(X)$$

tal que se verefice (33). Pruebe que existe único semigrupo junto continuo sobre X que tiene C como su generador extendido.

Problema 102. Haga una teorema que resume Problemas 95-101.

8. QUASI-ANALIDIDAD, SEMIGRUPOS

En esta sección tenemos un desarollo para semigrupos lineales que son de interés en el sujecto de probabilidad y otros campos.

Definición 27. Sea f una función real y $u, \delta \in R$. Si n es un entero y

$$[u, u + \delta n] \subset \text{domino de } f,$$

designamos la differencia de orden n de f sobre el intervalo $[u, \delta n]$ como

$$\Delta_f(n; u, \delta) \ = \ \Sigma_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^{n-k} f(u + k\delta).$$

Problema 103. Sea f una función real, acotada por $M \geq 0$, cuyas domino contiene el intervalo $[a, b]$. Pruebe que si n es un entero, $u, \delta \in R$ y $[u + \delta n]$, entonces

$$\Delta_f(n; u, \delta) \ \leq \ M 2^n.$$

El próximo problema sigue de un teorema be Arne Buerling [2], p 429. Quizás se puede considerar consultando a [2], p.

Problema 104. Sea f una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y existe $M, \epsilon > 0$ tal que

$$|\Delta_f(n; u, \delta)| \ \leq \ M(2 - \epsilon)^n \text{ si } [u, u + \delta n] \subset \text{ domino de } f.$$

Prube que f es analı́tico a cada $x \in (a, b)$.

Definición 28. Sea G un cojunto de funciones reales que tienen $[a, b]$ como su domino. Dicimos que G tiene quasi-analicidad si no hay dos miembros de G que son igual en un intervalo (que tiene mas que uno punto).

El próximo problema sigue de un teorema que se puede encontrar en [17].

Problema 105. Sea

$$\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$$

una sucesión decadencia con limte cero y G un conjunto de funciones reales con domino el intervalo $[a, b]$ tal que si $f \in G$, existe $M, \epsilon > 0$ tal que

$$|\Delta_f(n; u, \delta)| \ \leq \ M(2 - \epsilon)^n \text{ si } [u, u + \delta_k n] \subset [a, b].$$

Resulta que G tiene quasi-analicidad.

Problema 106. Sea T un semigrupo lineal de contracciones, fuerte continuo sobre el espacio de Banach X. Pruebe que si $x \in X,\ f \in X^*$ y

$$g(t) \ = \ f(T(t)x),\ t \geq 0, \tag{34}$$

entonces

$$|\Delta_g(n; u, \delta)| \ \leq \ |f| \|x\| |T(\delta) - I|^n.$$

Se dice que una functión g en (34) es una functional de una trayectoria (una 'fot' para corta) de T.

Problema 107. Sea T un semigrupo lineal de contracciones, fuerte continuo y

$$\limsup_{t \to 0+} |T(t) - I| < 2. \tag{35}$$

Resulta que cada 'fot' de T es analitico a cada $t > 0$.

Problema 108. Sea T un semigrupo lineal de contracciones, fuerte continuo y

$$\liminf_{t \to 0+} |T(t) - I| < 2. \tag{36}$$

Resulta que el conjunto de todo 'fot' de T tiene quasi-analidad.

9. Sujectos Adicionales Para Investigaciones y Notas

Notas sobre Sección 1

Gracias a mi esposa, Barbara Neuberger, a Alfonso y Miryam Castro, a Victor Padron y a Cristina Trevisan para su ayuda en la preparación de esta libro. Tengo mucho de aprender de la lengua Castellano.

Notas sobre Sección 3

Los semigrupos continuos son casos muy especial en el mundo de semigrupos de transformaciones. Son bases, essentialmente, en ecuaciones ordinarias lineal en espacios to Banach. Se puede ver [15],[12],[23],[13] para mas informació.

Notas sobre Sección 4

En [20] hay una discusión bastante completa de gradientes de Sobolev. Hay applicaciones a problems burg-Landau, fluidos transonicos, superfices minimos. La condición de gradiente en Definición 9 es bastante fuerte.

Se puede ver [27] para información para proyectiones a

$$\{\begin{pmatrix} x \\ Tx \end{pmatrix} : x \in D(T)\},$$

donde H, K son espacions de Hilbert y T es una transformación lineal, cerada y con domino denso en H y con rango en K. Estas proyectiones son al fondo de las construciones de gradientes de Sobolev. Vease [1] como una referencía general para espacios de Sobolev.

Problema 109. Haga una investigación de la Desigualdad de gradiente y trate de encontrar una condición mas debil que implica la conclución de Problema 40

Notas sobre Sección 5

Los libros citeNagle,[12],[23],[13] trata de semigrupos lineales y tienen mucha información sobre aplicaciones. En [27] hay un sección excelente sobre semigrupos fuerte continuos. Por cierto, los problemas en este libro constuta no mas que una introdución.

Notas sobre Sección 6

Aquí usamos libremente varios ideas en [3], [11] para un desarollo de una forma de el teorema de Crandall-Liggett [5] (que en su forma general se verifice in espacio de Banach cualquiera y ademas trata de propriedades de trayectorias del semigrupo S en Problema 75). En [3] hay un recíproco en el caso de los espacios de Hilbert en que el domino de A es un convexo en H. Esta referencia contiene muchos problemas (con pruebas!) para astudia adicional en la direción de esta sección. Por las ideas originales de operador monotone maximo, vease [30], [14]. Vease [16] para quizás el primero apariencia de una resolvente en una formula exponencial.

Notas sobre Sección 7

Desde almenos a 1960 se quieran una teoría completa de semigrupos nolineales que tiene el poder de la teoría para semigrupos lineales fuerte continuas. Quizás el primero papel en esta dirección fuera [16]. El libro [3] tiene un buen descripción del caso de semigrupos en espacios de Hilbert en que son de contracciones sobre un covexo. El libro [11] trata de varios extensiones a espacios mas general pero hasta 1991 no hay mucho progresso substancial en el dirección de una teoría completa. 'Teoría completa' quiere decir una teoría en que hay un conjunto de semigrupos SG y un conjunto de generadores GEN y un método de (1) a cada miembro de SG, encontra un miembro de GEN por medio de differenciación a zero y (2) a cada miembro de GEN, construir por medio de una formula exponcial un miembro de SG. Los problemas en este seción son, por la mayor parte, de [6],[7],[8].

El teorema de Sentiles en Problema 97 es una resulta en **??**. En esta referencia se puede encontrar información sobre la β convergencia y la toplogia β también.

Muchas ecuaciones nolineales tiene solamente soluciones localmente definada. Por ejemplo si y satisface

$$y' = 1 + y^2 \tag{37}$$

entonces el domino de y es no mas que π en longitud. Sin embargo, podemos definir un semigrupo local. Primero necesitamos:

Definición 29. Sea X un conjunto. Un semigrupo local es un función T con domino $[0, b)$ (quizás $b = \infty$) tal que si $0 \leq t < b$, $T(t)$ es una transformación de un subconjunto de X a X tal que $T(0)$ tiene domino X. Si $x \in X$, denotamos por

$$\sup\{t \geq 0 : x \in \text{ domino de } T\} \text{por } \overline{x}.$$

Ademas supongamos que si $x \in X$,

$$T(t)T(s)x \ = \ T(t+s)x, \ 0 \ \leq t, s, t+s \ \overline{x}.$$

Si $X, MCR(X)$ son como en Sección 7, podemos definir

$$(U(t)\mu)(\Omega) \ = \ \mu(T(t)^{-1}\Omega),$$

donde $\mu(T(t)^{-1}\Omega) = 0$ si no hay $y \in X$ tal que $T(t)x \in \Omega$.

Problema 110. Haga una teoría para semigrupos junto continuos locales sobre un espacio X, (métrico, separable y completo) que parece la teoría para semigrupos junto continuos locales en Sección 7.

Una solucción de este problema vale un buen publicación.

Notas sobre Sección 8

Se puede ver [18] y [10] para applicaciones a processos de Markov. En particular, las condiciones (35),(36) son significas en este caso. Se puede ver [19] para un discusción historical.

References

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press,1978.

[2] A. Beurling, Collected Works of Arne Beurling, Volume I, Birkhäuser, 1989.

[3] H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones*, North Holland, 1973.

[4] A. Castro and J.W. Neuberger, *An inverse function theorem*, Contemp. Math. 221 (1998), 127-132.

[5] M. Crandall and T. Liggett, *Generation of nonlinear semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math. 93 (1971), 265-298.

[6] J.R. Dorroh and J.W. Neuberger, *Lie generators for semigroups of transformations on a Polish space*, Electronic J. Differential Equations 1 (1993), addendum attached 1994.

[7] J.R. Dorroh and J.W. Neuberger, A theory of strongly continuous semigroups in terms of Lie generators, J. Functional Analysis 136 (1996), 114-126.

[8] J.R. Dorroh and J.W. Neuberger, Linear extensions of nonlinear semigroups, Birkhäuser (to appear).

[9] E.B. Dynkin, *Markov Proceses-I*, Grund. Math. Wiss. 121, Springer 1965.

[10] D.G. Kendall, *Some recent developments in the theory of denumerable Markov processes*, Trans. Fourth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Academia Prague (1967), 11-27.

[11] G. da Prato, *Applications croissantes et èquations d'évolutions dans les espacè de Banach*, Academic Press 1976.

[12] J. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford 1994.

[13] E. Hille and R. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, American Mathematical Society, 1957.

[14] G. Minty, *On the maximal domain of a monotone function*, Michigan Math. J. 3 (1961), 135-137.

[15] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer 1999.

[16] J.W. Neuberger, *An exponential formula for one-parameter semigroups of nonlinear transformations*, J. Math. Soc. Japan 18 1966, 154-157.

[17] J.W. Neuberger, Prevalance of Chaotic Differences for Unpredictable Functions, Acta Scientiarum Math., 61 (1995), 181-196.

[18] J.W. Neuberger, *Quasi-Analyticity and Semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972), 909-922.

[19] J.W. Neuberger, *Beurling's Analyticity Theorem*, Mathematics Intelligencer,15 (1993), 34-38.

[20] J.W. Neuberger, *Sobolev Gradients and Differential Equations*, Springer Lecture Notes In Mathematics 1670 (1997).

[21] J.W. Neuberger *Laplacians and Sobolev gradients*, Proc. Am. Math. Soc. 128 (2000), 853-855.

[22] J.W. Neuberger, *A complete theory for jointly continuous nonlinear semigroups on a complete separable metric space* (preprint).

[23] A. Pazy *Semigroups of linear operators and applicatons to partial differential equations*, Appl. Math. Sci. 44, Springer-Verlag 1983.

[24] R.J. Renka and J.W. Neuberger, *Minimal surfaces and Sobolev gradients*, Siam J. Sci. Comp. 16 (1995), 1412-1427.

[25] R.J. Renka and J.W. Neuberger, *Sobolev gradients and the Ginzburg-Landau equations*, Siam J. Sci.Comp.

[26] , A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.

[27] F. Riesz and Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar 1965, (Dover 1990).

[28] F.D. Sentilles, *Bounded continuous functions on a completely regular space*, Trans. Amer. Math. Soc. 168 (1972), 311-336.

[29] G.F. Webb, *Representation of semigroups of nonlinear nonexpansive transformations in Banach spaces*, J. Math. Mech. 19 (1969/70), 159-170.

[30] E. Zarantonello, Solving functional equations by contractive averaging, Math. Research Center Report 160, Madison, Wisconsin (1960)

Department of Mathematics
University of North Texas
Denton, TX 76203
USA
E-mail address: jwn@unt.edu