Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$

Von *Ulrich Christian* in Göttingen

Diese Arbeit umfaßt zwei Paragraphen. Im ersten Paragraphen will ich einige triviale aber ärgerliche Fehler verbessern, die sich in [24] eingeschlichen haben. Bei dieser Gelegenheit möchte ich allen danken, die mich auf Fehler aufmerksam gemacht haben und in diesem Zusammenhang besonders einen Brief erwähnen, den mir Y. Morita und T. Shintani am 25. Dezember 1975 geschrieben haben.

Im zweiten Paragraphen mache ich einige Bemerkungen zu [24]. Dabei gehe ich auch auf die Möglichkeiten ein, die Resultate von [24] auszubauen.

§ 1. Berichtigung von [24]

1. In [24], Seite 135, Formel (61) läuft s über alle ganzen Zahlen $\equiv 0 \bmod q$. In (63) ist daher $\zeta(2)$ durch $q^{-2}\,\zeta(2)$ zu ersetzen. Es muß also statt (63) heißen

$$(1) \qquad q A(\Gamma(2, q), 1)\, \zeta(2) \operatorname{vol} \mathfrak{G}(1)\, 2^{2-2g} \int_0^\infty |t+\mathrm{i}|^{-g}\, t^{g-3}\, \mathrm{d}t.$$

Diese Abänderung um den Faktor q^{-2} zieht sich durch bis Seite 136, Formel (76).

2. In [24], Seite 135, Formel (68) muß es heißen

$$(2) \qquad A(\Gamma(2, q), 1) = q^4 \frac{1}{2} \prod_{p \mid q} (1 - p^{-4}).$$

Dieses Resultat steht in [15], Formel (17) richtig, wurde aber falsch abgeschrieben.

3. Führt man diese Verbesserungen durch, so bekommt man statt [24], Seite 136, Formel (76):

$$(3) \qquad \tau_2 = \frac{-q^2\, \omega(q)}{2^6 \cdot 3^2}\, (2g - 3).$$

4. Die Bedingung [24], Seite 136, Formel (82) ist Unsinn. Es gilt immer $x'Ix=0$. Dadurch werden auch einige der folgenden Rechnungen, einschließlich Hilfssatz 3 sinnlos. Trotzdem bleibt der Rest, etwa ab [24], Seite 137, Formel (87) richtig, wenn man die Mengen $\mathfrak{s}_{31}$ und $\mathfrak{s}_{32}$ wie folgt erklärt: Zunächst gibt es zu jedem $M\in\mathfrak{s}_3$ ein $K\in\Gamma(2)$, so daß [24], Seite 137, Formeln (89) bis (94) gelten. Jetzt definiere man:

$\mathfrak{s}_{31}$ umfaßt alle diejenigen Matrizen $M\in\mathfrak{s}_3$, zu denen es keine konjugierte Matrix P der Gestalt [24], Seite 137, Formel (90) mit (94) gibt.

$\mathfrak{s}_{32}$ umfaßt alle diejenigen Matrizen $M\in\mathfrak{s}_3$, zu denen es ein konjugiertes P der Gestalt [24], Seite 137, Formel (90) mit (94) gibt.

Eine ausführliche Darstellung dieses Sachverhaltes findet man bei I. Münchhausen [44], Fall I: $\chi(M,x)=(x-\varepsilon)^4$, $\varepsilon\in\{-1,1\}$, Formel (20) bis kurz vor Formel (50).

Mit dieser neuen Definition von $\mathfrak{s}_{31}$, $\mathfrak{s}_{32}$ bleibt alles Weitere richtig.

5. Auf der rechten Seite von [24], Seite 142, Formel (147) muß es heißen

$$J=\frac{1}{2}\,[\Omega(2):\Omega(2,q)]\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{S\in\mathfrak{M}\\ S\equiv 0 \bmod q}}\big(K(S)+K(-S)\big). \tag{4}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ tritt dadurch auf, daß die Gruppe $\Omega(2)$ die Matrix $-E$ enthält, die Gruppe $\Omega(2,q)$ für $q>2$ aber nicht. Offenbar gilt

$$\frac{1}{2}\,[\Omega(2):\Omega(2,q)]=[\Gamma(1):\Gamma(1,q)],$$

wobei $\Gamma(1)$ die elliptische Modulgruppe bezeichnet.

Statt [24], (117), (146), (147) bekommt man also

$$\tau_{31}=\eta(2,q)\,A\big(\Gamma(2,q),2\big)\,[\Gamma(1):\Gamma(1,q)]\,J^* \tag{5}$$

mit

$$J^*=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{S\in\mathfrak{M}\\ S\equiv 0 \bmod q}}\gamma^{-1}(S)\,\big(K^*(S)+K^*(-S)\big), \tag{6}$$

$$K^*(S)=q^3\int_{\mathfrak{Y}}\operatorname{Det}(2\mathrm{i}\,Y+S)^{-g}\,(\operatorname{Det}Y)^{g-3-\varepsilon}\,\mathrm{d}\,Y. \tag{7}$$

Man schreibe wie in [24], Seite 142 wieder qS statt S. Es folgt dann wie in [24], Seite 142:

$$J^*=2\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{S\in\mathfrak{M}}\operatorname{Re}K^*(-qS). \tag{8}$$

Hieraus bekommt man wie in [24], Seite 142, Formel (151):

$$J^*=(-1)^g\,2^{4-2g}\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(\varepsilon)\operatorname{Re}L_g(\varepsilon). \tag{9}$$

Hierbei sind $\Phi(\varepsilon)$ und $L_g(\varepsilon)$ durch [24], Seite 143, Formeln (152), (153) erklärt.

Bei der Berechnung des Integrals $L_g(\varepsilon)$ sind mir einige kleine Fehler unterlaufen, was wohl darauf zurückzuführen ist, daß ich ungeschickt vorgegangen bin. In dem eingangs erwähnten Brief vom 25. Dezember 1975 wiesen mich Y. Morita und T. Shintani darauf hin, daß man den Wert des Integrals $L_g(\varepsilon)$ durch Gammafunktionen ausdrücken kann. Ich will nun vorführen, wie man das Integral $L_g(\varepsilon)$ sehr elegant mit Hilfe von Gammaintegralen ausrechnen kann.

Es sei $Z=X+\mathrm{i}\,Y$ eine komplexe 2×2 Matrix mit $Y>0$ und

$$G(2,g;Z)=\int_{V>0}(\operatorname{Det} V)^{g-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Sp}(ZV)}\,\mathrm{d}V. \tag{10}$$

Aus C. L. Siegel [58], Seite 384 oder aus [23], Seite 286, Formel (1352) entnimmt man

$$G(2,g;Z)=(-\mathrm{i})^{-2g}(\operatorname{Det} Z)^{-g}F(2,g) \tag{11}$$

mit

$$F(2,g)=\int_{V>0}(\operatorname{Det} V)^{g-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Sp}\,V}\,\mathrm{d}V. \tag{12}$$

Aus [24], Seite 143, Formel (153) entnimmt man

$$L_g(\varepsilon)=\int_{Y>0}\operatorname{Det}(Y+\mathrm{i}E)^{-g}(\operatorname{Det} Y)^{g-3-\varepsilon}\,\mathrm{d}Y. \tag{13}$$

Dieses Integral konvergiert absolut. Daraus folgt

$$L_g(\varepsilon)=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\int_{Y>0}\operatorname{Det}(Y+\mathrm{i}E)^{-g}(\operatorname{Det} Y)^{g-3-\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\delta\,\mathrm{Sp}\,Y}\,\mathrm{d}Y. \tag{14}$$

Benutzt man nun die Formeln (11), (12) mit $Z=Y+\mathrm{i}E$, so bekommt man

$$(-\mathrm{i})^{-2g}F(2,g)\,L_g(\varepsilon)=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\int_{Y>0}\int_{V>0}(\operatorname{Det} V)^{g-\frac{3}{2}}(\operatorname{Det} Y)^{g-3-\varepsilon}\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Sp}(YV+iV+i\delta Y)}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}Y. \tag{15}$$

Das auf der rechten Seite von (15) stehende Doppelintegral konvergiert absolut. Daher kann man die beiden Integrale vertauschen. Es folgt

$$\begin{aligned}(16)\quad &(-\mathrm{i})^{-2g}F(2,g)\,L_g(\varepsilon)\\ &=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\int_{V>0}(\operatorname{Det} V)^{g-\frac{3}{2}}\Big(\int_{Y>0}(\operatorname{Det} Y)^{g-3-\varepsilon}\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Sp}((V+i\delta E)Y)}\,\mathrm{d}Y\Big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Sp}\,V}\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Das innere Integral über Y ist nach (10), (11) gerade

$$G\left(2,g-\frac{3}{2}-\varepsilon,\,V+\mathrm{i}\delta E\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}(2g-3-2\varepsilon)}\operatorname{Det}(V+\mathrm{i}\delta E)^{-g+\frac{3}{2}+\varepsilon}F\left(2,g-\frac{3}{2}-\varepsilon\right).$$

Dieses in (16) eingesetzt liefert wegen $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}}$:

$$\begin{aligned}(17)\quad &\mathrm{e}^{\pi i g}F(2,g)\,L_g(\varepsilon)\\ &=\mathrm{e}^{\pi i\left(g-\frac{3}{2}-\varepsilon\right)}F\left(2,g-\frac{3}{2}-\varepsilon\right)\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\int_{V>0}(\operatorname{Det} V)^{g-\frac{3}{2}}\operatorname{Det}(V+\mathrm{i}\delta E)^{-g+\frac{3}{2}+\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Sp}\,V}\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Man überlegt sich nun, daß man auf der rechten Seite von (17) den Grenzübergang $\delta \to 0$ unter dem Integral ausführen kann. Es folgt

$$F(2,g)\,L_g(\varepsilon)=e^{-\pi i\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)}\,F\left(2,g-\frac{3}{2}-\varepsilon\right)\int_{V>0}(\operatorname{Det}V)^{\varepsilon}\,e^{-\operatorname{Sp}V}\,dV,$$

also

$$F(2,g)\,L_g(\varepsilon)=e^{-\pi i\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)}\,F\left(2,g-\frac{3}{2}-\varepsilon\right)F\left(2,\frac{3}{2}+\varepsilon\right). \tag{18}$$

Somit

$$L_g(\varepsilon)=e^{-\frac{\pi i}{2}(3+2\varepsilon)}\,\frac{F\left(2,g-\frac{3}{2}-\varepsilon\right)F\left(2,\frac{3}{2}+\varepsilon\right)}{F(2,g)}. \tag{19}$$

Nach C. L. Siegel [58], Hilfssatz 37 oder [23], Seite 287, Formel (1355) ist

$$F(2,g)=\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(g)\,\Gamma\left(g-\frac{1}{2}\right), \tag{20}$$

wobei Γ die übliche Gammafunktion bezeichnet. Dabei ist zu beachten, daß in [23], Seite 287, Formel (1355) der Exponent von π fälschlich mit $\frac{n(n-1)}{2}$ angegeben wurde. Richtig muß es $\frac{n(n-1)}{4}$ heißen.

Aus (19), (20) bekommt man

$$L_g(\varepsilon)=\pi^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\pi i}{2}(3+2\varepsilon)}\,\frac{\Gamma\left(g-\frac{3}{2}-\varepsilon\right)\Gamma(g-2-\varepsilon)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(g)\,\Gamma\left(g-\frac{1}{2}\right)}. \tag{21}$$

Dieses stimmt überein mit der Formel, die mir Morita und Shintani in dem früher erwähnten Brief für das Integral $L_g(\varepsilon)$ mitgeteilt haben.

Diese Formel benutze man nun statt der Formel (161) in [24], Seite 143. Differentiation nach ε liefert

$$\operatorname{Re}L_g'(0)=\pi^{\frac{3}{2}}\,\frac{\Gamma\left(g-\frac{3}{2}\right)\Gamma(g-2)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma(g)\,\Gamma\left(g-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(g-1)(g-2)\left(g-\frac{3}{2}\right)},$$

wegen $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ also

$$\operatorname{Re}L_g'(0)=\frac{\pi}{2(g-1)\left(g-\frac{3}{2}\right)(g-2)}. \tag{22}$$

Dieses benutze man statt Formel (165) in [24], Seite 143.

Man berechne $\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \Phi(\varepsilon))$ wie in [24], Seite 144. Fügt man dann alles zusammen, so erhält man statt [24], Seite 144, Formel (172):

$$\tau_{31} = \frac{1}{2^2 \cdot 3} A(\Gamma(2, q), 2) [\Gamma(1) : \Gamma(1, q)]. \tag{23}$$

6. Genau wie in [24], Seite 142, Formel (147) ist auch in [24], Seite 145, Formel (188) der Faktor

$$\frac{1}{2} [\Omega(2) : \Omega(2, q)] = [\Gamma(1) : \Gamma(1, q)]$$

einzufügen.

7. In [24], Seite 147, Formel (206) muß die 2 im Nenner fort.

8. Führt man diese Verbesserungen durch, so bekommt man statt [24], Seite 147, Formel (207):

$$\tau_{32} = \frac{-1}{2^3 \cdot 3} A(\Gamma(2, q), 2) [\Gamma(1) : \Gamma(1, q)]. \tag{24}$$

9. Aus (23), (24) folgt

$$\tau_3 = \frac{1}{2^3 \cdot 3} A(\Gamma(2, q), 2) [\Gamma(1) : \Gamma(1, q)]. \tag{25}$$

Dieses ist statt [24], Seite 147, Formel (208) zu setzen. Nach [15], Formel (17) ist

$$A(\Gamma(2, q), 2) = q^4 \frac{1}{2} \prod_{p \mid q} (1 - p^{-4}). \tag{26}$$

Bekanntlich (man siehe z. B. [10]) ist ferner

$$[\Gamma(1) : \Gamma(1, q)] = 2^{-1} q^3 \prod_{p \mid q} (1 - p^{-2}). \tag{27}$$

Definiert man nun $\omega(q)$ durch [24], Seite 133, Formel (35), so folgt

$$\tau_3 = \frac{1}{2^5 \cdot 3} q \omega(q). \tag{28}$$

10. Nach [24], Seite 154, Satz ist der Rang der Schar der Spitzenformen gleich $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$. Dabei ist τ_1 durch [24], Seite 133, Formel (34) gegeben. Somit hat man:

Satz. *Der Rang der Schar der Spitzenformen vom Gewicht $g > 4$ zur Gruppe $\Gamma(2, q)$ $(q > 2)$ ist*

$$\delta(\Gamma(2, q), g) = \frac{q^4 \omega(q)}{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5} (2g-2)(2g-3)(2g-4) - \frac{q^2 \omega(q)}{2^6 \cdot 3^2} (2g-3) + \frac{q \omega(q)}{2^5 \cdot 3}. \tag{29}$$

Hierbei ist

$$\omega(q) = q^6 \prod_{p \mid q} \{(1 - p^{-2})(1 - p^{-4})\}. \tag{30}$$

Dieses Resultat stimmt überein mit den Ergebnissen von Y. Morita [43], Seite 167, Main Theorem, T. Shintani [57], Seite 64 unten sowie T. Yamazaki [70], Seite 53.

§ 2. Anmerkungen zu [24]

11. Bei I. Münchhausen [44] findet man die Beweise vieler Hilfssätze, die ich in [24] ohne Beweis angegeben habe.

12. Man setze

$$S=\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_{12} \\ s_2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Dann gilt

$$\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\mathfrak{x}=\operatorname{Det} S. \tag{32}$$

Auf Grund dieser Relation hängt die Funktion $\Phi(\varepsilon)$ aus [24], Seite 143, Formel (152) zusammen mit der Funktion $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ aus C. L. Siegel [61], § 4, Formel (14). Statt in [24], Seite 144 den Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(\varepsilon\Phi(\varepsilon)\big)$ zu berechnen, hätte ich auch aus Siegels Arbeit das Residuum von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ bei $s=\frac{3}{2}$ entnehmen können. Die Verallgemeinerung der Funktion $\Phi(\varepsilon)$ auf den Fall $n>2$ wird bei T. Shintani [57] untersucht.

13. Ich will jetzt auf die Frage eingehen, inwieweit man hoffen kann, in absehbarer Zeit die Rangformel auch für $n>2$ zu berechnen. Dabei beschränke ich mich auf Hauptkongruenzgruppen $\Gamma(n, q)$ mit $q>2$, so daß also keine elliptischen Fixpunkte auftreten.

Zunächst braucht man zur Berechnung der Rangformel mit Hilfe der Selbergschen Spurformel eine Klassifikation der Konjugiertenklassen von $\Gamma(n, q)$. Die Resultate meiner Arbeiten [12], [18], [21], [22], [25] gelten für beliebige n. Darüber hinaus entdeckte H.-B. Meyer, daß im Zusammenhang mit Hamiltonschen Differentialgleichungen unabhängig von meinen Resultaten eine Reduktionstheorie für symplektische Matrizen entwickelt wurde. Hierher gehören die Arbeiten A. C. Aitken and H. W. Thurnbull [1]; N. Burgoyne and R. Cushman [2]; D. Carlson [3], [4]; A. Ciampi [26]; W. A. Coppel [27]; R. Cushman [28]; V. Kučera [35]; A. J. Laub and K. Meyer [37]; H.-B. Meyer [38], [39], [40], [41]; J. E. Potter [45]; J. Williamson [69].

Damit ist die Klassifikation der Konjugiertenklassen für beliebige $n>2$ zwar noch nicht vollzogen, doch scheint eine gute Grundlage vorhanden zu sein.

Als weiteres braucht man zur Einführung konvergenzerzeugender Faktoren gewisse Abschätzungen von Teilreihen der Kernreihe. Hier kann ich darauf verweisen, daß meine Arbeiten [19], [20] für beliebige n gelten.

Schließlich müssen Integrale ausgerechnet werden. Hier hat man Resultate von T. Shintani [57] und W. Quaas [46]. Für $g \geqq 2n+3$ rechnet T. Shintani am Ende von [57] die Beiträge zur Rangformel von denjenigen Integralen aus, die zu solchen Konjugiertenklassen von $\Gamma(n, q)$ gehören, die eine Matrix vom Typ $\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$ enthalten. Es ist zu vermuten, daß sich diese Konjugiertenklassen durch die Bedingungen

$$\chi(M, x) = (x-1)^{2n}, \tag{33}$$

$$\mathrm{Rg}(M-E) \leqq n \tag{34}$$

beschreiben lassen. Hierbei ist $\chi(M, x) = \mathrm{Det}(xE - M)$ das charakteristische Polynom von M.

Hierzu stellen sich nun folgende Fragen: Werden Shintanis Konjugiertenklassen tatsächlich durch (33), (34) beschrieben? Liefern die übrigen Konjugiertenklassen zur Rangformel den Beitrag 0? Kann man Shintanis Bedingung $g \geqq 2n+3$ etwa mit Hilfe der in [19], [20] gegebenen Abschätzungen auf die Bedingung $g > 2n$ herabdrücken?

Im Falle $n=2$ sind diese Fragen mit ja zu beantworten. Für $n > 2$ ist das ein offenes Problem; doch scheint die Lösung dieses Problemes nicht mehr unangreifbar zu sein.

Für $n=3$ und $g > 6$ wurde eines der von Shintani behandelten Rangformelintegrale auch von W. Quaas [46] berechnet.

14. Bei der Lektüre von Selbergs Vorlesungsausarbeitung [50] fand ich zwei Ideen, die ich noch einmal hervorheben möchte, weil sie mir für die Berechnung der Rangformel von Interesse zu sein scheinen. Beide Ideen könnten dazu beitragen, die Einführung konvergenzerzeugender Faktoren zu umgehen. Bei der Beschreibung beider Ideen beschränke ich mich auf Gruppen, deren Fundamentalbereich eine Spitze hat. Für Gruppen, deren Fundamentalbereich mehrere Spitzen besitzt, ist die Methode entsprechend zu verallgemeinern. Die Bezeichnungen seien wie bei A. Selberg [51].

Eine Bemerkung bei Selberg [50], Seite 3 unten und Seite 4 oben legt es nahe, folgendes zu versuchen.

Man schneide die Spitze des Fundamentalbereichs $\mathfrak{D}$ durch die Bedingung $\mathrm{Det}\, Y \leqq c$ ab. Hierbei ist c eine positive Konstante. Der verbleibende Teil $\mathfrak{D}_c$ von $\mathfrak{D}$ ist dann kompakt. Wendet man nun mit $\mathfrak{D}_c$ statt $\mathfrak{D}$ die Spurformel an, wie sie bei A. Selberg [51], Seiten 63 bis 64 beschrieben wird, so bekommt man statt des Integrals bei A. Selberg [51], Seite 64 oben ein Integral

$$\int_{\mathfrak{D}_{M_0, c}} k(x, M_0 x)\, \mathrm{d}x \tag{35}$$

mit

$$\mathfrak{D}_{M_0, c} = \sum_{M \in \Gamma}^{*} M \mathfrak{D}_c, \tag{36}$$

wobei alle Bezeichnungen wie bei A. Selberg [51] gewählt wurden.

Man könnte nun versuchen, das Integral (35) zu berechnen und dann den Grenzübergang $c \to \infty$ zu vollziehen. Der Vorteil dieser Methode könnte darin liegen, daß man ohne konvergenzerzeugende Faktoren auskommt. Der Nachteil dieser Methode dürfte darin liegen, daß das Integrationsgebiet $\mathfrak{D}_{M_0, c}$ vermutlich in vielen Fällen komplizierter ist als der Bereich $\mathfrak{D}_{M_0}$.

Die zweite Idee fand ich bei A. Selberg [50], Seite 12 unten und Seite 13 oben. Um diese Idee zu beschreiben, benutze ich die Bezeichnung aus A. Selberg [51], Seite 60, Formel (2. 2). In (50) betrachtet Selberg eine diskontinuierliche Gruppe Γ in der gewöhnlichen oberen Halbebene, deren Fundamentalbereich eine Spitze bei ∞ besitzt. Weiter sei Γ_∞ diejenige Untergruppe von Γ, die ∞ festläßt.

Von der „Kernreihe"

$$K(x, y; \chi) = \sum_{M \in \Gamma} \chi(M)\, k(x, My) \tag{37}$$

greift Selberg nun die zur Spitze ∞ gehörende Teilreihe

$$\sum_{M \in \Gamma_\infty} \chi(M)\, k(x, My) \tag{38}$$

heraus. Aber anders, als es z.B. bei H. Shimizu [54], Y. Morita [43] oder mir [24] gemacht wird, führt Selberg zur Anwendung der Spurformel keine konvergenzerzeugende Faktoren ein, sondern er verfährt wie folgt. In dem aus der Spurformel herrührenden Ausdruck

$$\int_{\mathfrak{D}} \sum_{M \in \Gamma_\infty} \chi(M)\, k(x, My) \frac{dx\, dy}{y^2} \tag{39}$$

werden Summation und Integration nicht vertauscht. Aus der restlichen Summe

$$\sum_{M \in \Gamma - \Gamma_\infty} \chi(M)\, k(x, My) \tag{40}$$

nehmen wir nun die Summanden über diejenigen M heraus, die zwar selbst nicht in Γ_∞ liegen, die aber zu einem Element in Γ_∞ konjugiert sind. Angenommen, in

$$\int_{\mathfrak{D}} \sum_{M \in \Gamma - \Gamma_\infty} \chi(M)\, k(x, My) \frac{dx\, dy}{y^2} \tag{41}$$

M konjugiert zu einem Element von Γ_∞

kann man Summation und Integration vertauschen. Dann wende man die Selbergsche Spurformel an. Nimmt man noch an, daß zwei Elemente aus Γ_∞ nicht konjugiert sind, so bekommt man aus (41)

$$\sum_{M \in \Gamma_\infty} \int_{\mathfrak{D}_M - \mathfrak{D}} \chi(M)\, k(x, My) \frac{dx\, dy}{y^2}, \tag{42}$$

wobei $\mathfrak{D}_M$ wie bei Selberg [51], Seite 64 erklärt ist. Kann man in (42) wieder Summation und Integration vertauschen und faßt man (42) mit (39) zusammen, so bekommt man als Anteil der Spitze

$$\int_{\mathfrak{D}_M} \sum_{M \in \Gamma_\infty} \chi(M)\, k(x, My) \frac{dx\, dy}{y^2}. \tag{43}$$

Wenn hier auch einige Voraussetzungen eingehen, so ist doch erreicht, daß in dem Ausdruck (39) Summation und Integration nicht vertauscht zu werden brauchten. Selberg benutzt in [50] diese Methode. Zur weiteren Berechnung des Ausdrucks (43) faßt er dann erst einige Glieder der Summe zusammen. Er bekommt eine neue Summe und vertauscht erst dann Summation und Integration.

Mir scheint, daß diese Methode vielleicht mehr Beachtung verdient, als es bisher wohl der Fall war.

15. In [44] berechnet I. Münchhausen explizit alle Konjugiertenklassen von $\Gamma(2)$. Damit ist eine wichtige gruppentheoretische Voraussetzung für die Berechnung der Rangformel zu $\Gamma(2, q)$ in den Fällen $q = 1, 2$ erfüllt.

16. Bei der Berechnung der Rangformel treten die Spitzenzahlen $A(\Psi, j)$ auf, wie ich sie in [15] untersucht habe. Für gewisse paramodulare Gruppen zweiten Grades wurden solche Spitzenzahlen von H. Reefschläger [47] berechnet.

17. Bei der Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen treten selbstverständlich die Beiträge solcher Untergruppen von $\Gamma(n, q)$ auf, die gewisse Randkomponenten festlassen. Bei Y. Morita werden auch gewisse Randkomponenten explizit betrachtet. Da es mir selbst schwierig erschien, die Randkomponenten zu berechnen, und weil man nur die Gruppen braucht, die Randkomponenten festlassen, habe ich eine Reduktionstheorie für symplektische Matrizen entwickelt, mit deren Hilfe man die Beiträge der Randkomponenten zur Rangformel bekommt, ohne explizit über Randkomponenten reden zu müssen. Daß man diese Reduktionstheorie dann auch benutzen kann, um Aussagen über die Randkomponenten zu bekommen, ist klar. In diese Richtung gehen die Arbeiten von H.-B. Meyer [38], [39], [40], [41].

18. Hat man den Rang der Schar der Spitzenformen bestimmt, so kann man daraus auch leicht den Rang der Schar aller Modulformen berechnen. Für die volle Siegelsche Modulgruppe habe ich das am Ende von [13] ausgeführt. Für beliebige Kongruenzgruppen findet man ein entsprechendes Resultat in [23] Seite 330, Satz 5. 67.

Literatur

[1] *A. C. Aitken* and *H. W. Thurnbull*, An introduction to canonical matrices, New York 1961.
[2] *N. Burgoyne* and *R. Cushman*, Normal forms for real linear Hamiltonian differential equations, Celestical Mechanics **8** (1974), 435—443.
[3] *D. Carlson*, Inequalities relating the degree of elementary divisors within a matrix, Simon Stevin **44** (1970), 3—10.
[4] *D. Carlson*, Inequalities for the degree of elementary divisors of modules, Linear Algebra Appl. **5** (1972), 293—298.
[5] *R. Busam*, Eine Verallgemeinerung gewisser Dimensionsformeln von Shimizu, Invent. math. **11** (1970), 110—149.
[6] *U. Christian*, Über Hilbert-Siegelsche Modulformen und Poincarésche Reihen, Math. Ann. **148** (1962), 257—307.
[7] *U. Christian*, Zur Theorie der Hilbert-Siegelschen Modulfunktionen, Math. Ann. **152** (1963), 275—341.
[8] *U. Christian*, Über die Uniformisierbarkeit der Fixpunkte der Modulgruppe zweiten Grades, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1964, 211—231.
[9] *U. Christian*, Über die Uniformisierbarkeit elliptischer Fixpunkte Hilbert-Siegelscher Modulgruppen, J. reine angew. Math. **223** (1966), 113—130.
[10] *U. Christian*, Einführung in die Theorie der paramodularen Gruppen, Math. Ann. **168** (1967), 59—104.
[11] *U. Christian*, Some remarks on symplectic groups, modular groups and Poincaré's series, Amer. J. Math. **89** (1967), 319—362.
[12] *U. Christian*, A reduction theory for symplectic matrices, Math. Zeitschr. **101** (1967), 213—244.
[13] *U. Christian*, Siegelsche Modulformen und Integralgleichungen, Math. Zeitschr. **101** (1967), 299—305.
[14] *U. Christian*, Über die erste Zeile paramodularer Matrizen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1967, 239—245.
[15] *U. Christian*, Über die Anzahl der Spitzen Siegelscher Modulgruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **32** (1968), 55—60.

[16] *U. Christian*, Hilbert-Siegelsche Modulformen und Integralgleichungen, Monatshefte f. Math. **72** (1968), 412—418.
[17] *U. Christian*, Über teilerfremde symmetrische Matrizenpaare, J. reine angew. Math. **229** (1968), 43—49.
[18] *U. Christian*, Über elliptische Fixpunkte symplektischer Matrizen, Monatshefte f. Math. **72** (1968), 289—295.
[19] *U. Christian*, Untersuchung einer Poincaréschen Reihe. I, J. reine angew. Math. **233** (1968), 37—88.
[20] *U. Christian*, Untersuchung einer Poincaréschen Reihe. II, J. reine angew. Math. **237** (1969), 12—25.
[21] *U. Christian*, Über gewisse Gleichungen zwischen symplektischen Matrizen, J. reine angew. Math. **243** (1970), 55—65.
[22] *U. Christian*, Zur Theorie der symplektischen Gruppen, Acta Arith. **24** (1973), 61—85.
[23] *U. Christian*, Siegelsche Modulfunktionen, Vorlesungsausarbeitung, Mathematisches Institut der Universität Göttingen 1974/75.
[24] *U. Christian*, Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. reine angew. Math. **277** (1975), 130—154.
[25] *U. Christian*, Bemerkungen über symplektische Gruppen, Comm. pure appl. Math. (erscheint demnächst).
[26] *A. Ciampi*, Classification of hamiltonian linear systems, Indiana Univ. Math. J. **23** (1973), 513—526.
[27] *W. A. Coppel*, Matrix quadratic equations, Bull. Austral. Math. Soc. **10** (1974), 377—401.
[28] *R. Cushman*, The momentum mapping of the harmonic oscillator, Symposia Mathematica **14** (1975), 323—342.
[29] *R. Godement*, Seminaire H. Cartan, Fonctions automorphes, Paris 1957/58.
[30] *E. Gottschling*, Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades, Math. Ann. **138** (1959), 103—124.
[31] *E. Gottschling*, Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe, Math. Ann. **143** (1961), 111—149.
[32] *E. Gottschling*, Über die Fixpunktuntergruppen der Siegelschen Modulgruppe, Math. Ann. **143** (1961), 399—430.
[33] *K.-B. Gundlach*, Die Bestimmung der Funktionen zu einigen Hilbertschen Modulgruppen, J. reine angew. Math. **220** (1965), 109—153.
[34] *T. Kubota*, Elementary theory of Eisenstein series, Tokyo 1973.
[35] *V. Kučera*, The matrix equation $AX + XB = C$, Siam J. appl. Math. **26** (1974), 15—25.
[36] *R. P. Langlands*, The dimension of spaces of automorphic forms, Amer. J. Math. **85** (1963), 99—125.
[37] *A. J. Laub* and *K. Meyer*, Canonical forms for symplectic and hamiltonian matrices, Celestical Mech. **9** (1974), 213—238.
[38] *H.-B. Meyer*, Fixpunkte von Automorphismen verallgemeinerter Einheitskreise, Dissertation, Freiburg 1974.
[39] *H.-B. Meyer*, The matrix equation $AZ + B - ZCZ - ZD = 0$, Siam J. appl. Math. **30** (1976), 136—142.
[40] *H.-B. Meyer*, Normal forms in $\mathrm{sp}(n, \mathbb{R})$ for the adjoint action of $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, Preprint, Mathematisches Institut der Universität Freiburg 1976.
[41] *H.-B. Meyer*, Matrix Riccati solutions, Preprint, Mathematisches Institut der Universität Freiburg 1976.
[42] *H. Minkowski*, Discontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, J. reine angew. Math. **129** (1905), 220—274 und Ges. Werke II, 53—100.
[43] *Y. Morita*, An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **21** (1974), 167—248.
[44] *I. Münchhausen*, Explizite Bestimmung der Konjugiertenklassen der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades, J. reine angew. Math. (erscheint demnächst).
[45] *J. E. Potter*, Matrix quadratic solutions, Siam J. appl. Math. **14** (1966), 496—501.
[46] *W. Quaas*, Berechnung eines Integrals, das bei der Bestimmung des Ranges der Schar der Siegelschen Modulformen auftritt, Acta Arith, (erscheint demnächst).
[47] *H. Reefschläger*, Über die Anzahl der Spitzen paramodularer Gruppen zweiten Grades, J. reine angew. Math. (erscheint demnächst).
[48] *M. Sato* and *T. Shintani*, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **69** (1972), 1081—1082.
[49] *M. Sato* and *T. Shintani*, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. **100** (1974), 131—170.
[50] *A. Selberg*, Harmonic analysis. 2. Teil, Vorlesungsausarbeitung, Mathematisches Intitut der Universität Göttingen 1954.
[51] *A. Selberg*, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47—87.
[52] *A. Selberg*, Automorphic functions and integral operators, Seminary in analytic functions, vol. 2, Princeton 1957, 152—161.

[53] *A. Selberg*, Discontinuous groups and harmonic analysis, Proc. Internat. Congr. Math. 1962, 177—189.

[54] *H. Shimizu*, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, Ann. of Math. **77** (1963), 33—71.

[55] *T. Shintani*, On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integral binary cubic forms, Proc. Japan Acad. **46** (1970), 909—911.

[56] *T. Shintani*, On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 132—188.

[57] *T. Shintani*, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **22** (1975), 25—65.

[58] *C. L. Siegel*, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of Math. **36** (1935), 527—606 und Ges. Abh. I, 326—405.

[59] *C. L. Siegel*, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. II, Annals of Math. **37** (1936), 230—263 und Ges. Abh. I, 410—443.

[60] *C. L. Siegel*, The volume of the fundamental domain for some infinite groups, Trans A.M.S. **39** (1936), 209—218 und Ges. Abh. I, 459—468.

[61] *C. L. Siegel*, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, Math. Zeitschr. **43** (1938), 682—708 und Ges. Abh. II, 41—67.

[62] *C. L. Siegel*, Einheiten quadratischer Formen, Abh. Math. Sem Univ. Hamburg **13** (1940), 209—239 und Ges. Abh. II, 138—168.

[63] *C. L. Siegel*, The average measure of quadratic forms with given determinant and signature, Annals of Math. **45** (1944), 667—685 und Ges. Abh. II, 473—491.

[64] *C. L. Siegel*, Quadratische Formen, Vorlesungsausarbeitung, Mathematisches Institut der Universität Göttingen 1955.

[65] *C. L. Siegel*, Lectures on quadratic forms, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1955/56 (Reissued 1963).

[66] *C. L. Siegel*, Lectures on Riemann matrices, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1963.

[67] *J. Spilker*, Über den Rand der Siegelschen Halbebene, Math. Zeitschr. **90** (1965), 273—285.

[68] *J. Spilker*, Elliptische Fixpunkte symplektischer Matrizen, Monatshefte f. Math. **76** (1972), 339—344.

[69] *J. Williamson*, On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems, Amer. J. Math. **58** (1936), 141—163.

[70] *T. Yamazaki*, On Siegel modular forms of degree two, Amer. J. Math. **98** (1976), 39—53.

Mathematisches Institut der Universität, Bunsenstraße 3—5, 3400 Göttingen

Eingegangen 1. Dezember 1976