Sur les séries de translatées de fonctions positives

par

Zoltán Buczolich [1]
Jean-Pierre Kahane [2]
R. Daniel Mauldin [3]

On associe à une fonction $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^+$ et à une partie discrète de R^+, Λ, la série des translatées de f par les éléments de Λ, et les ensembles complémentaires, $C(f,\Lambda)$ et $D(f,\Lambda)$, où cette série converge resp. diverge. On distingue les Λ de type 1, pour lesquels, quel que soit f mesurable, l'un de ces deux ensembles est de mesure nulle, et les Λ de type 2. Buczolich et Mauldin ont montré que $\{\log n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ est de type 2. Nous donnons d'autres exemples de type 2 et nous montrons que le type 2 est générique, et le type 1 rare. Le théorème 1 donne un exemple de type 1.

On series of translates of positives functions

Given $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^+$ and Λ discrete in R^+ we denote by $C(f,\Lambda)$ resp. $D(f,\Lambda)$ the $x-$set where the series $\Sigma f(x+\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ converges resp. diverges. The sets Λ break into two types. Type 1 consists of Λ such that the Lebesgue measure of either $C(f,\Lambda)$ or $D(f,\Lambda)$ vanishes whatever f measurable, and type 2 consists of all the other Λ. Buczolich and Mauldin proved that $\{\log n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ is of type 2. Type 2 is generic, type 1 is rare, and we give examples of both cases (theorems 1, 2, 3).

[1] Department of Analysis, Eötvös Loránd University, Budapest, Rákóczi út 5, 1088, Hongrie.
[2] Département de Mathématique, Bât. 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.
[3] Department of Mathematics, University of North Texas, Denton, Texas 76203, USA.
Les recherches de Zoltán Buczolich ont été subventionnées par les bourses T019476 et FKFP 0192/1999 du Fonds National Hongrois pour la recherche scientifique et celles de R. Daniel Mauldin par la bourse DMS-9801583 de la NSF.

Abridged English version

The investigation of

$$C(f,\Lambda)=\big\{x:\Sigma f(x+\lambda)<\infty,\;\;(\lambda\in\Lambda)\big\}$$

and

$$D(f,\Lambda)=\big\{x:\Sigma f(x+\lambda)=\infty,\;\;(\lambda\in\Lambda)\big\}$$

goes back to Lekkerkerker 1958 [4], in the case $\Lambda=\{\log n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ and $f=1_E$. Answering a long standing question, Buczolich and Mauldin exhibited a set E such that both $C(f,\Lambda)$ has positive Lebesgue measure and $D(f,\Lambda)$ contains an interval $(f=1_E,\ \Lambda=\{\log n\})$ [1]. We continue this investigation, both for $\Lambda=\{\log n\}$ and for other Λ, on distinguishing type 1 and type 2.

Theorem 1 says that the union of all finite sets $2^{-k}\,\mathbb{N}\cap[n_k,n_{k+1}[$ (n_k being an increasing sequence of integers, $k=1,2,\ldots$) is of type 1, meaning that the Lebesgue measure of either $C(f,\Lambda)$ or $D(f,\Lambda)$ is zero whenever f is Lebesgue-measurable.

Theorem 2 is about the case $\Lambda=\{\log n\}$, $n=1,2,\ldots$ (type 2), and exhibits f such that $C(f,\Lambda)$ has full Lebesgue measure on $]0,\infty[$, while $D(f,\Lambda)$ contains $]-\infty,0[$.

Theorem 3 expresses that type 2 corresponds to an open dense set of Λ, with a natural topology.

Proposition 4 says that if $\Lambda=\{\lambda_n\}$, $\lambda_n\uparrow\infty$ and $\overline{\lim}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$, Λ is of type 2.

Propositions 5 and 7 give other examples of type 2 and proposition 6 shows that types 1 and 2 can be tested on the functions $f\in C_0^+(\mathrm{R})$ (continuous, positive, tending to 0 at infinity).

It proves convenient to define asymptotically lacunary resp. asymptotically dense Λ by the conditions $\overline{\lim}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$ resp. $=0$ (cf. proposition 4). We also define $T(\Lambda)$, the semi-group of translators of Λ : t is a translator of Λ whenever $\lambda+t$ belongs to Λ for every $\lambda\in\Lambda$ but a finite number. Clearly $C(f,\Lambda)+T(\Lambda)$ is included in $C(f,\Lambda)$, and $D(f,\Lambda)-T(\Lambda)$ is included in $D(f,\Lambda)$. These notions are too weak to give a characterization of Λ of type 1 (cf. theorem 1 and proposition 7).

A une partie discrète infinie de R^+, Λ, et à une fonction mesurable définie sur R à valeurs dans R^+, f, nous faisons correspondre la somme

$$s(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(x+\lambda)$$

et les sous-ensembles complémentaires de R

$$C = C(f,\Lambda) = \{x : s(x) < \infty\}, \quad D = D(f,\Lambda) = \{x : s(x) = \infty\}.$$

Que peut-on dire de ces ensembles, et en particulier de leurs mesures de Lebesgue, $|C|$ et $|D|$? La question s'est présentée dans la littérature sous des formes diverses, et généralement en notation multiplicative.

Dans le cas $\Lambda = \{\log n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Lekkerkerker a établi en 1958 deux résultats importants :

1) Si $f(x)$ est intégrable par rapport à la mesure $e^x\,dx$, alors $|D| = 0$.

2) Il existe une fonction $f(x)$, somme de fonctions indicatrices d'intervalles disjoints, non intégrable par rapport à la mesure $e^x\,dx$, telle que $|D| = 0$.

Il a observé d'autre part que, si $|D| = 0$, on peut changer $f(x)$ sur un ensemble de mesure nulle, à savoir la remplacer par 0 sur l'ensemble $D + \Lambda$ (somme algébrique), de façon que, pour la nouvelle fonction, f^*, on ait $D(f^*, \Lambda) = \emptyset$ [4]. Ces résultats ont été retrouvés et complétés, le premier par Weizsäcker [5] et le second par Haight, qui l'a étendu au cas d'un Λ quelconque [2], [3]. Toujours dans le cas $\Lambda = \{\log n\}$, Haight a demandé si, pour toute fonction à valeurs 0 ou 1, on a nécessairement $|C| = 0$ ou $|D| = 0$ [2], [3]. Weizsäcker a posé la même question relativement à toute fonction $f(x)$ [5]. Buczolich et Mauldin ont répondu négativement, en construisant une fonction f à valeurs 0 ou 1 telle que C soit de mesure pleine sur un intervalle, et D contienne un autre intervalle [1].

Nous dirons que Λ est de type 1 si, pour toute fonction $f(x)$, on a soit $|C| = 0$, soit $|D| = 0$, et que Λ est de type 2 dans le cas contraire. Commençons par exhiber un Λ de type 1, et par préciser pour $\Lambda = \{\log n\}$ le théorème de Buczolich et Mauldin.

Théorème 1. *Soit $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{N} \cap [n_k, n_{k+1}[$, où (n_k) est une suite croissante d'entiers positifs, et soit Λ la réunion des Λ_k. Alors Λ est de type 1.*

Théorème 2. *Soit $\Lambda = \{\log n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Alors Λ est de type 2, et il existe une fonction $f(x)$ telle que C soit de mesure pleine sur la demi-droite $]0, \infty[$ et que D contienne la demi-droite $]-\infty, 0[$.*

L'importance du théorème 1 tient à ce que le type 1 est "rare" dans le sens suivant. Ordonnons chaque Λ sous forme d'une suite croissante $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Pour chaque Λ, les suites (r_n) strictement positives définissent une base de voisinages, constitués des Λ' tels que $|\lambda'_n - \lambda_n| < r_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. L'ensemble des Λ constitue ainsi un espace topologique $\mathcal{L}$ qui est un espace de Baire.

Théorème 3. *Dans $\mathcal{L}$, les Λ de type 2 constituent un ouvert dense.*

Pour chaque $a \geq 0$, définissons $\mathcal{L}(a)$ comme la partie de $\mathcal{L}$ constituée des Λ tels que $\overline{\lim}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = a$ $(n \to \infty)$. Les $\mathcal{L}(a)$ sont ouverts. On dira que Λ est asymptotiquement dense s'il appartient à $\mathcal{L}(0)$, et sinon qu'il est asymptotiquement lacunaire.

Proposition 4. *Si Λ est asymptotiquement lacunaire, Λ est de type 2, et il existe deux intervalles I et J et une fonction f tels que C contienne I et D contienne J ; on peut imposer que I soit à gauche de J, ou aussi bien que I soit à droite de J.*

Ainsi les Λ de type 1 sont asymptotiquement denses.

Proposition 5. *Supposons qu'il existe trois intervalles I, J, K tels que $J = K + I - I$ (somme algébrique), I à gauche de J et à une distance de J supérieure ou égale à $|I|$, et deux suites (y_j) et (N_j) tendant vers l'infini ($y_j \in R^+$, $N_j \in \mathbb{N}$) tels que, pour chaque j, $y_j - I$ contienne au moins N_j points de Λ qui ne soient pas combinaisons linéaires rationnelles de $\Lambda \cap (y_j - \Lambda)$. Alors Λ est de type 2. De plus, il existe une $f(x)$ telle que D contient I et que C soit de mesure pleine sur J.*

Dans tous les énoncés qui précèdent, on peut imposer à la fonction f d'être une fonction indicatrice (à valeurs 0 ou 1), ou aussi bien d'être une fonction continue tendant vers 0 à l'infini (nous écrirons alors $f \in C_0^+(\mathrm{R})$). Il y a là un fait général, et un problème.

Proposition 6. *Pour toute fonction $f(x)$ positive et mesurable au sens de Lebesgue, il existe une fonction $g \in C_0^+(R)$ telle que $C(f, \Lambda)$ et $C(g, \Lambda)$ ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle. Ainsi, pour tester les types 1 et 2, on peut se borner aux $g \in C_0^+(R)$.*

Question. Peut-on se borner aux fonctions indicatrices ?

A tout Λ nous associons un semi-groupe $T(\Lambda)$, constitué des **translateurs** de Λ. On dira que $t > 0$ est un translateur de Λ si, pour tout $\lambda \in \Lambda$ sauf un nombre fini, $\lambda + t$

appartient à Λ. Dans le théorème 1, $T(\Lambda)$ est l'ensemble des rationnels dyadiques > 0, et, dans le théorème 2, $T(\Lambda) = \Lambda$. On a toujours, quel que soit f,

$$C + T(\Lambda) \subset C\,, \quad D - T(\Lambda) \subset D\,.$$

Des exemples montrent que la considération de $T(\Lambda)$ ne permet pas de distinguer le type 1 et le type 2. Voici le plus frappant.

Proposition 7. *Soit* $\Lambda_k = 2^{-m(k)}\,\mathbb{N} \cap [n_k, n_{k+1}[$, *où* (n_k) *est une suite croissante d'entiers positifs, et* $m(k)$ *une suite convenablement choisie en fonction de* (n_k). *Alors la réunion des* Λ_k *est de type 2, et* $T(\Lambda)$ *est constitué de rationnels dyadiques.*

Voici un aperçu des preuves et des enchaînements.

La preuve du théorème 1 est délicate ; elle repose sur le lemme suivant.

Lemme. *Soit* $\varphi_n : \mathbb{T} \to R^+$ *une suite de fonctions mesurables positives définies sur le cercle* $\mathbb{T}(= R/\mathbb{Z})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Si* $\Sigma\varphi_n(2^n t) < \infty$ *p.p., alors* $\Sigma\varphi_n\big(2^n t + \frac{1}{2}\big) < \infty$ *p.p.*

Le théorème 2 utilise la proposition 5 et les translateurs.

Le théorème 3 résulte de la proposition 5 (pour montrer que le type 2 est dense) et de la proposition 6 (pour montrer qu'il est ouvert).

La proposition 4 est élémentaire.

La proposition 5 explicite et étend légèrement l'argument de Buczolich et Mauldin, qui utilise l'indépendance des $\log p$ (p premier) [1].

La proposition 6 est élémentaire.

La proposition 7 est assez délicate. Elle s'inspire de la proposition 5 en éliminant tout argument d'indépendance.

Le détail des preuves et des compléments se trouveront dans un article intitulé
“*On series of translates of positive functions*”.

Références

[1] Z. Buczolich and R.D. Mauldin : *On the convergence of* $\Sigma f(nx)$ *for measurable functions,* Mathematika, à paraître.

[2] J.A. Haight : *A linear set of infinite measure with no two points having integral ratio,* Mathematika **17** (1970), 133–138.

[3] J.A. Haight : *A set of infinite measure whose ratio set does not contain a given sequence,* Mathematika **22** (1975), 195–201.

[4] C.G. Lekkerkerker : *Lattice points in unbounded point sets I,* Indag. Math. **20** (1958), 197–205.

[5] H. von Weizsäcker : *Zum Konvergenzverhalten der Reike* $\sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$ *für* $\lambda-$*messbare Funktionen* $f : R^+ \to R^+$, Diplomarbeit, Universität München, 1970.